

JOSEPH CIPRIANI • PIERRE PERETTI

# Symétrie et matière

## Théorie des groupes en physique de la matière

L3, MASTER DE PHYSIQUE  
ET DE CHIMIE PHYSIQUE,  
DOCTORAT,  
ÉCOLES D'INGÉNIEURS

- Cours complet
- Rappels des définitions
- Exercices d'application corrigés



Joseph Cipriani et Pierre Peretti

# Symétrie et matière

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : [www.deboecksuperieur.com](http://www.deboecksuperieur.com)

© De Boeck Supérieur s.a., 2023  
Rue du Bosquet, 7 – B-1348 Louvain-la-Neuve

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :

Bibliothèque Nationale, Paris : juin 2023

ISBN : 978-2-8073-5152-3

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2023/13647/080

La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit.

Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur.

Galilée, *L'Essayeur*, 1623



### *Remerciements*

Notre ami, Serge Racine, avec qui nous avons enseigné la théorie des groupes à l'Université Paris Diderot, est aussi à l'origine de ce travail. Nous le remercions ici chaleureusement.



# Table des matières

---

Avant-propos	13
<b>1 Les transformations de symétrie</b>	<b>15</b>
1.1 Définitions . . . . .	15
1.2 Les différents types de symétries géométriques . . . . .	15
1.2.1 La symétrie de rotation . . . . .	16
1.2.2 La symétrie de réflexion . . . . .	16
1.2.3 L'inversion $I$ . . . . .	16
1.2.4 La rotation-réflexion (ou rotation impropre) $S_n$ . . . . .	17
1.2.5 Associativité du produit de deux opérations de symétrie . . . . .	18
<b>2 Les groupes de transformations de symétrie</b>	<b>21</b>
2.1 Structure de groupe . . . . .	21
2.1.1 Loi de groupe . . . . .	21
2.1.2 Groupes particuliers . . . . .	21
2.2 Groupes de symétrie géométriques . . . . .	22
2.2.1 Groupe de symétrie d'un système quantique . . . . .	22
2.2.2 Exemples de groupes de symétrie géométriques . . . . .	22
2.2.3 Table de multiplication . . . . .	23
2.3 Sous-groupes, isomorphismes et classes d'équivalence . . . . .	25
2.3.1 Sous-groupes . . . . .	25
2.3.2 Isomorphisme de deux groupes . . . . .	26
2.3.3 Classes d'un groupe . . . . .	26
2.3.4 Éléments équivalents dans les groupes de transformations géométriques . . . . .	28
2.3.5 Produits de classes . . . . .	29
2.3.6 Produit direct de deux groupes . . . . .	30
2.4 Un groupe de symétrie non géométrique, le groupe des permutations $\mathbb{P}_n$	31
2.4.1 Définition et notation des permutations . . . . .	31
2.4.2 Cycles des permutations . . . . .	31
2.4.3 Transpositions . . . . .	32
2.4.4 Parité d'une permutation . . . . .	32
2.4.5 Classes du groupe des permutations . . . . .	32
2.4.6 Le groupe $\mathbb{P}_2$ . . . . .	33
2.4.7 Le groupe $\mathbb{P}_3$ . . . . .	33

<b>3</b>	<b>Les 32 groupes ponctuels cristallographiques</b>	<b>35</b>
3.1	Les symétries du réseau cristallin . . . . .	35
3.1.1	Translations primitives dans un cristal illimité . . . . .	35
3.1.2	Le réseau cristallin . . . . .	35
3.1.3	Limitation des types d'axes de symétrie dans un réseau cristallin	36
3.2	Les groupes ponctuels cristallographiques non cubiques . . . . .	37
3.2.1	Les groupes du type $C_n$ et $S_{2n}$ . . . . .	37
3.2.2	Les groupes du type $C_{nh}$ et $C_{nv}$ . . . . .	38
3.2.3	Les groupes du type $D_n$ . . . . .	39
3.2.4	Les groupes du type $D_{nh}$ et $D_{nd}$ . . . . .	39
3.3	Les groupes cristallographiques cubiques . . . . .	40
3.3.1	Le groupe $T$ . . . . .	40
3.3.2	Le groupe $T_d$ . . . . .	40
3.3.3	Le groupe $T_h$ . . . . .	41
3.3.4	Le groupe $O$ . . . . .	41
3.3.5	Le groupe $O_h$ . . . . .	41
3.4	Tableaux récapitulatifs et nomenclature . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Généralités sur la représentation des groupes</b>	<b>45</b>
4.1	Représentation d'un groupe dans un espace vectoriel . . . . .	45
4.2	Somme de deux représentations . . . . .	50
4.3	Fonctions de base d'une représentation . . . . .	51
4.4	Représentations équivalentes . . . . .	52
4.5	Ligne d'une représentation . . . . .	52
4.6	Caractères d'une représentation . . . . .	53
4.7	Restriction d'une représentation d'un groupe à un de ses sous-groupes	53
4.8	Représentations conjuguées . . . . .	53
4.9	Réductibilité d'une représentation . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Opérateurs de symétrie en physique quantique</b>	<b>57</b>
5.1	Représentation des opérations de symétrie dans l'espace des états . . .	57
5.2	Spectre d'une observable et représentations irréductibles dans l'espace des états . . . . .	58
5.3	Levées de dégénérescence . . . . .	59
5.4	Inversion et parité . . . . .	60
5.5	Symétrie par rapport au renversement du temps . . . . .	60
5.6	Permutations de particules identiques . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Théorèmes généraux sur la représentation des groupes</b>	<b>65</b>
6.1	Nombre de représentations irréductibles d'un groupe . . . . .	65
6.2	Relations d'orthogonalité . . . . .	65
6.3	Réduction d'une représentation . . . . .	67

6.4	Unicité de la décomposition en représentations irréductibles . . . . .	68
6.5	Détermination d'une représentation par ses caractères . . . . .	68
6.6	Application à la recherche des tables de caractères . . . . .	68
6.6.1	Trois relations utiles . . . . .	68
6.6.2	Représentations des groupes abéliens . . . . .	69
6.6.3	Représentations des groupes cycliques . . . . .	69
6.6.4	Détermination d'une table de caractères : groupe $\mathbb{D}_3$ . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Systèmes en interaction négligeable</b>	<b>73</b>
7.1	Produits tensoriels d'états en physique quantique . . . . .	73
7.2	Produits tensoriels de deux groupes . . . . .	73
7.3	Représentations du produit tensoriel de deux groupes . . . . .	74
7.4	Représentations du produit direct de deux groupes . . . . .	75
7.5	Parité et dégénérescence . . . . .	76
7.6	Produits tensoriels de représentations d'un même groupe . . . . .	77
7.7	Carrés symétrique et antisymétrique d'une représentation . . . . .	77
7.8	Tables de caractères des 32 groupes ponctuels . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Règles de sélection des éléments matriciels</b>	<b>83</b>
8.1	Le théorème de Wigner-Eckart . . . . .	83
8.1.1	Lemme . . . . .	83
8.1.2	Théorème de Wigner-Eckart . . . . .	84
8.2	Exemples d'applications des règles de sélection . . . . .	86
<b>9</b>	<b>Vibration des molécules</b>	<b>89</b>
9.1	Forme canonique de l'énergie de vibration d'une molécule . . . . .	89
9.1.1	Degrés de liberté de vibration d'une molécule . . . . .	89
9.1.2	Coordonnées normales de vibration . . . . .	90
9.1.3	Propriété fondamentale des coordonnées normales . . . . .	90
9.1.4	Exemple de coordonnées normales . . . . .	90
9.2	Détermination des symétries des modes normaux . . . . .	91
9.2.1	Représentation totale de la molécule vibrante . . . . .	92
9.2.2	Calcul des caractères de la représentation totale de vibration . . . . .	92
9.3	Etude quantique des symétries des niveaux de vibration . . . . .	95
9.3.1	L'hamiltonien de vibration en fonction des coordonnées normales . . . . .	95
9.3.2	Dégénérescence d'un mode vibratoire donné de pulsation $\omega_\alpha$ . . . . .	96
9.3.3	Symétries des modes vibratoires . . . . .	97
<b>10</b>	<b>Les groupes continus</b>	<b>99</b>
10.1	Généralités sur les groupes continus . . . . .	99
10.2	Représentations linéaires des groupes continus . . . . .	100
10.3	Les groupes $SU(n)$ et $S\mathcal{O}(n)$ . . . . .	100

10.4	Les groupes à symétrie axiale . . . . .	101
10.5	Les groupes à symétrie sphérique . . . . .	102
10.5.1	Le groupe des rotations $\mathbb{R}(3)$ . . . . .	102
10.5.2	Le groupe des rotations propres et impropres $\mathbb{O}(3)$ . . . . .	103
10.6	Le groupe unitaire et le groupe hermitien . . . . .	104
10.7	Générateurs infinitésimaux . . . . .	105
10.7.1	Relations de commutation et rotations . . . . .	106
10.7.2	Le groupe des translations . . . . .	108
10.8	Les opérateurs de moment cinétique . . . . .	110
10.8.1	Le groupe de symétrie du moment cinétique . . . . .	110
10.8.2	L'opérateur de rotation par rapport à un axe dans l'espace des états . . . . .	110
10.9	Représentations irréductibles des groupes $\mathbb{O}(3)$ et $\mathbb{R}(3)$ . . . . .	111
10.9.1	Représentations irréductibles du groupe $\mathbb{R}(3)$ . . . . .	111
10.9.2	Représentation réalisée par les coordonnées d'un vecteur . . . . .	112
10.9.3	Représentations irréductibles du groupe $\mathbb{O}(3)$ . . . . .	113
10.9.4	Les groupes $\text{SU}(2)$ et $\mathbb{R}(3)$ . . . . .	113
10.9.5	Représentation des rotations sur la base des états propres du spin de l'électron . . . . .	114
10.9.6	Classes et représentations irréductibles des groupes $\text{SU}(2)$ et $\widehat{\mathbb{R}}(3)$ . . . . .	114
<b>11</b>	<b>Spectres des atomes libres</b> . . . . .	<b>117</b>
11.1	Composition de deux moments cinétiques . . . . .	117
11.2	La symétrie de l'hamiltonien de l'atome libre . . . . .	118
11.3	Configurations électroniques dans le champ central du noyau . . . . .	119
11.4	Termes électroniques dans le champ self-consistent . . . . .	120
11.4.1	Classification par termes des niveaux d'énergie de l'atome . . . . .	120
11.4.2	L'exemple du phosphore . . . . .	123
11.4.3	Parité des états d'énergie électronique . . . . .	124
11.5	Influence du couplage spin-orbite . . . . .	125
11.6	Facteur de Landé d'un atome libre . . . . .	126
11.7	Effet Zeeman d'un atome libre – Le groupe $\mathbb{C}_\infty$ . . . . .	127
11.8	Règles de sélection des transitions radiatives de l'atome libre . . . . .	128
<b>12</b>	<b>Ions dans un champ cristallin</b> . . . . .	<b>131</b>
12.1	Les groupes doubles cristallographiques . . . . .	131
12.1.1	Symétries locales dans un site cristallin . . . . .	131
12.1.2	Classes et représentations irréductibles des groupes doubles . . . . .	131
12.1.3	Symétries des niveaux ioniques dans un cristal . . . . .	134
12.2	Dégénérescences issues de la symétrie par rapport au sens du temps . . . . .	137
12.2.1	Opérateurs de conjugaison complexe . . . . .	137

12.2.2	Expression matricielle de l'opérateur de renversement du temps	138
12.2.3	Le théorème de Kramers . . . . .	139
12.2.4	Théorème général . . . . .	140
<b>13</b>	<b>Ondes dans les cristaux</b>	<b>143</b>
13.1	Symétries d'un cristal illimité . . . . .	143
13.1.1	Le groupe des translations primitives . . . . .	143
13.1.2	Groupe d'espace d'un cristal . . . . .	143
13.1.3	Groupe ponctuel du cristal . . . . .	144
13.1.4	Classes d'un groupe $\mathbb{G}$ modulo un sous-groupe $\mathbb{H}$ . . . . .	147
13.1.5	Représentation induite à partir d'un sous-groupe invariant . . .	148
13.1.6	Le groupe quotient $\mathbb{G}_e/\mathbb{H}$ . . . . .	148
13.2	Les représentations irréductibles du groupe d'espace . . . . .	149
13.2.1	Opérateur de translation dans l'espace des états . . . . .	149
13.2.2	Les opérateurs translation et vecteur d'onde . . . . .	149
13.2.3	Fonctions de Bloch . . . . .	150
13.2.4	Représentations irréductibles du groupe des translations primitives . . . . .	151
13.3	Le réseau réciproque et les zones de Brillouin . . . . .	152
13.3.1	Zones de Brillouin . . . . .	152
13.3.2	L'étoile du vecteur d'onde . . . . .	152
13.3.3	Points remarquables de la zone de Brillouin . . . . .	154
13.3.4	Niveaux d'énergie d'un cristal cubique en centre de zone . . . .	160
13.4	Groupes magnétiques . . . . .	163
13.4.1	Symétries magnétiques . . . . .	163
13.4.2	Représentations irréductibles . . . . .	164
13.4.3	Niveaux d'énergie de vecteur d'onde $\vec{k}$ donné . . . . .	165
<b>14</b>	<b>Exercices</b>	<b>169</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>203</b>
	<b>Index</b>	<b>205</b>



# Avant-propos

---

En mathématiques, le groupe est une structure algébrique fondamentale issue de la théorie des nombres et de la théorie des équations algébriques, la terminologie groupe étant due à Evariste Galois qui a utilisé au début du 19<sup>ème</sup> siècle le mot *groupe* au sens de *regroupement* pour des transformations.

Dans la nature et dans les différents domaines d'activité de l'homme, le domaine d'application de cette notion mathématique est très vaste.

Nous pouvons par exemple percevoir, à l'échelle macroscopique, la notion de groupe de symétrie dans des expériences familières : retourner la main, paume en bas ou en haut, c'est utiliser un groupe de transformation à deux éléments, l'identité et une rotation de 180° autour de l'axe du bras. Autre exemple : faire fonctionner une porte à tambour, c'est utiliser un groupe continu, celui de toutes les rotations autour d'un axe.

Lorsqu'on observe au niveau microscopique un diamant, c'est-à-dire un cristal de carbone pur, on peut mettre en évidence des axes de rotation ou des plans de symétrie laissant les atomes de carbone invariants, lors d'un ensemble d'opérations de symétrie ayant une structure de groupe.

Il est aussi bien connu que les transformations qui permettent de passer d'un repère inertiel à un autre repère inertiel forment un groupe : le groupe de Galilée en physique classique. En relativité restreinte, Henri Poincaré a montré que les transformations de Lorentz, les translations d'espace et de temps et les rotations forment ensemble un groupe de symétrie, appelé *groupe de Poincaré*.

L'application essentielle de la théorie des groupes que nous présentons ici se fait dans le domaine de la physique quantique et en particulier, en physique atomique, en physique moléculaire et en physique du solide.

Nous n'aborderons pas la notion de symétrie spontanément brisée. Un exemple classique est la cristallisation d'un liquide. Les symétries spontanément brisées sont l'élément essentiel des tentatives théoriques actuelles d'unification des forces fondamentales.

L'étude quantique des groupes de transformation de symétries et de leur représentation dans l'espace des états a principalement trois objectifs :

- caractériser les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes,
- expliquer la levée de dégénérescence d'un niveau d'énergie, sous l'effet d'une perturbation,
- déterminer les règles de sélection des transitions entre niveaux d'énergie.

Le but est ici d'initier les étudiants en licence ou master de physique, aux applications des groupes de transformation de symétrie.

## *Avant-propos*

Les notions mathématiques sont introduites progressivement, au fur et à mesure des besoins. Les théorèmes ne sont démontrés que lorsque cela permet de donner quelques éclaircissements sur la théorie et lorsque la démonstration est assez rapide.

---

# Les transformations de symétrie

---

Le mot symétrie avait plutôt pour les grecs le sens de *juste proportion* et il s'appliquait surtout aux arts. Le sens actuel de ce mot est plus géométrique : on parle de symétrie d'un objet par rapport à une droite, un plan, ou un point, ou encore de symétrie de rotation. Il en existe dans la nature de nombreux exemples : les cristaux de neige, de nombreuses fleurs, des animaux unicellulaires ; tous les solides cristallins possèdent de telles propriétés de symétrie.

Dans le langage scientifique le mot symétrie a un sens plus général : il désigne toute transformation qui laisse invariant un système, une loi physique ou une grandeur physique.

---

## 1.1 Définitions

- *Transformations de symétrie.*

On appelle transformations (ou opérations) de symétrie d'un système physique, les opérations qui amènent le système à coïncider avec lui-même. On dit aussi plus brièvement : symétries du système.

- *Produit de deux symétries.*

Une transformation de symétrie peut correspondre à la succession de deux ou plusieurs opérations de symétrie. Soient  $A$  et  $B$  deux opérations de symétrie successives, effectuées dans cet ordre. La transformation résultante est appelée *produit* et notée  $C = BA$

Notons qu'en général, ce produit n'est pas commutatif ( $BA \neq AB$ ).

---

## 1.2 Les différents types de symétries géométriques

Il existe trois types fondamentaux de symétrie géométrique :

- la rotation d'un angle donné autour d'un axe donné ;
- la réflexion (ou symétrie par rapport à un plan, ou miroir) ;
- la translation.

Ce dernier type de symétrie ne peut naturellement exister que pour un milieu idéalement considéré comme illimité, par exemple un réseau cristallin. Un corps de dimensions finies comme une molécule, ne peut évidemment pas posséder la symétrie de translation.

### 1.2.1 La symétrie de rotation

Les notations habituellement employées sont les suivantes :

- $C_n$  : rotation d'un angle  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$  autour d'un axe ( $n$  entier).  
Cet axe de rotation est dit d'ordre  $n$  ou axe  $n$ -aire.
- $C_n^p$  : rotation d'un angle  $\varphi = p \left( \frac{2\pi}{n} \right)$  autour d'un axe  $n$ -aire,  $p$  étant un entier.

*Remarques*

- $C_1$  correspond à une rotation d'angle  $2\pi$  (ou d'angle 0). Cette opération coïncide avec la transformation identité  $E$ .
- $C_n^p = C_{n/p}$  si  $n$  est multiple de  $p$ .

Par exemple,  $C_6^3$  correspond à la rotation d'un angle  $3 \times \frac{2\pi}{6} = \pi$  c'est-à-dire à  $C_6^3 = C_{6/3} = C_2$ .

- $C_n^n = C_1^1 = C_1 = E$

### 1.2.2 La symétrie de réflexion

Si un objet se superpose avec lui-même après une réflexion dans un plan, celui-ci est appelé *plan de symétrie*. Les réflexions dans un plan de symétrie sont notées  $\sigma$ .

On a les relations évidentes :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E \\ \sigma^n &= E \quad \text{si } n \text{ est pair} \\ \sigma^n &= \sigma \quad \text{si } n \text{ est impair} \end{aligned}$$

Si le plan de symétrie est perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre  $n$  on note en général la réflexion  $\sigma_h$ , l'indice h signifiant « horizontal » (l'usage est de qualifier l'axe de rotation de « vertical »).

Si le plan de symétrie contient un axe d'ordre  $n$ , on la note  $\sigma_v$  l'indice v signifiant « vertical ».

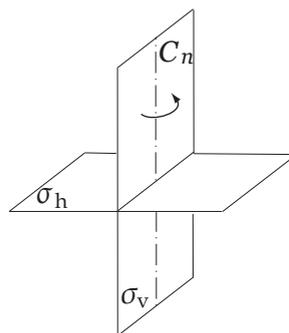


FIG. 1.1 – Plans de réflexion et axe  $n$ -aire.

### 1.2.3 L'inversion $I$

C'est la symétrie par rapport à un point  $\Omega$  dénommé centre d'inversion (ou centre de symétrie).

Si le centre d'inversion se trouve à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes, le système est invariant par un changement du signe des coordonnées, soit  $(x, y, z)$  en  $(-x, -y, -z)$ .

Exemple : La molécule d'éthylène  $C_2H_4$ .

Contrairement aux axes de rotation ou aux plans de réflexion, une molécule possède au plus un seul centre d'inversion  $O$ .

Propriété de l'inversion  $I$  :

$$I \sigma_h = \sigma_h I = C_2$$

$$I C_2 = C_2 I = \sigma_h$$

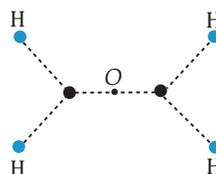


FIG. 1.2 – La molécule  $C_2H_4$

Les opérations  $C_2$ ,  $\sigma_h$  et  $I$  sont donc interdépendantes : la présence de deux d'entre elles entraîne la présence de la troisième.

### 1.2.4 La rotation-réflexion (ou rotation impropre) $S_n$

Si la rotation  $C_n$  d'ordre  $n$ , suivie d'une réflexion  $\sigma_h$  dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, amène le système en coïncidence avec lui-même, on dit que celui-ci possède un axe de rotation-réflexion d'ordre  $n$ . Cette opération de symétrie est notée  $S_n$  (cf. Fig. 1.3).

$$S_n = C_n \sigma_h = \sigma_h C_n$$

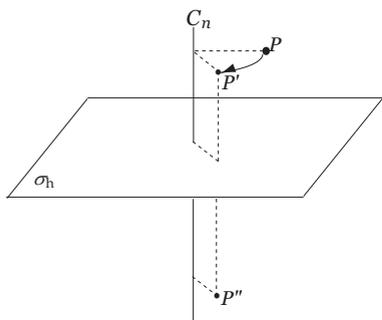


FIG. 1.3 – La rotation-réflexion.

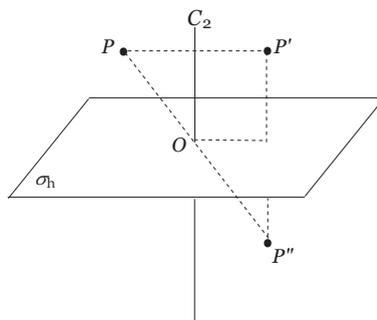


FIG. 1.4 – La rotation-réflexion  $S_2$ .

Notons que les deux opérations  $C_n$  et  $\sigma_h$  ne sont pas obligatoirement des opérations de symétrie du système :

- Si  $n$  est pair :

$$S_n^n = C_n^n \sigma_h^n = E E = E$$

- Si  $n$  est impair :

$$S_n^n = E \sigma_h = \sigma_h$$

et dans ce cas  $C_n$  et  $\sigma_h$  sont des opérations de symétrie du système.

Remarque :

$$S_2 = C_2 \sigma_h = I$$

*Exemple : la molécule de méthane  $\text{CH}_4$*

L'atome de carbone occupe le centre d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont occupés par les atomes d'hydrogène. La molécule possède des axes de symétrie de type  $S_4$ . En effet, tout atome H se superpose à un autre atome H par rotation-réflexion  $\sigma_h C_n$  autour de l'axe vertical et du plan perpendiculaire contenant l'atome de carbone.

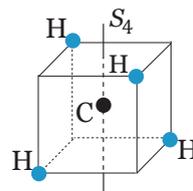


FIG. 1.5 – La molécule  $\text{CH}_4$ .

### 1.2.5 Associativité du produit de deux opérations de symétrie

*Théorème*

Le produit de plusieurs opérations de symétrie géométriques est associatif, c'est-à-dire que si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des opérations de symétrie du système, alors :

$$A(BC) = (AB)C$$

Pour établir le théorème il suffit de remarquer que ceci est vrai pour les trois opérations fondamentales : rotation, réflexion et translation.

*Remarque :*

On a coutume de désigner par la même notation l'opération de symétrie et l'élément correspondant. On dira par exemple la rotation  $C_n$  et l'axe  $C_n$  d'ordre  $n$ .

*Exemple 1*

Considérons deux rotations  $C_2$  et  $C'_2$  autour de deux axes concourants  $Oa$  et  $Ob$  et formant un angle  $\theta$ . Montrons que le produit  $C_2 C'_2$  est une rotation d'angle  $2\theta$  autour d'un axe passant par le point  $O$  et perpendiculaire aux deux premiers. Le produit de deux rotations est un déplacement : s'il existe un axe invariant, c'est une rotation autour de cet axe. Considérons un point  $P$  sur la perpendiculaire en  $O$  à  $Oa$  et  $Ob$ .

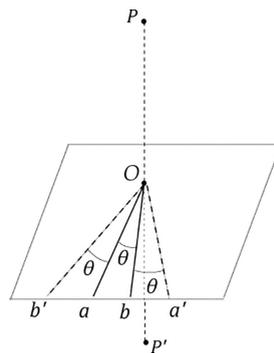


FIG. 1.6 – Produit des rotations  $C_2 C'_2$ .

La rotation  $C'_2$  amène  $P$  en  $P'$ ,  $Oa$  en  $Oa'$  et laisse  $Ob$  invariant. La rotation  $C_2$  amène ensuite  $P'$  en  $P$ ,  $Ob$  en  $Ob'$  et laisse  $Oa'$  invariant. Les points de la droite  $PP'$  sont donc invariants : la droite  $PP'$  est donc l'axe de rotation. On obtient l'angle de rotation en remarquant que  $Oa'$  et  $Ob'$  font, respectivement avec  $Oa$  et  $Ob$ , l'angle  $2\theta$ .

Le produit  $C_2 C'_2$  n'est pas commutatif : en inversant l'ordre des deux rotations on obtient aussi une rotation d'angle  $2\theta$ , mais de sens inverse.

*Exemple 2*

Montrer que le produit de deux réflexions  $\sigma_v$  et  $\sigma'_v$  dans deux plans formant un dièdre d'angle  $\varphi$  donne une rotation d'angle  $2\varphi$  autour de la droite d'intersection  $\Delta$  des deux plans. Le produit est-il commutatif? On a (figure 1.7) :

$$P \xrightarrow{\sigma'_v} P' \xrightarrow{\sigma_v} P''$$

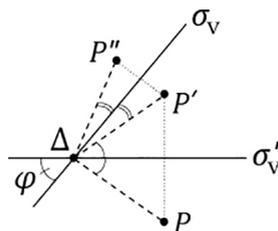


FIG. 1.7 – Produit de deux rotations de  $\pi$  autour des axes  $Oa$  et  $Ob$ .

La relation  $\sigma_v \sigma'_v = C(2\varphi)$  est évidente d'après la figure 1.7.

Ce produit est non commutatif car l'inversion des facteurs change le sens de la rotation.

Notons que la relation ci-dessus montre l'interdépendance des trois opérations : l'existence de deux d'entre elles entraîne celle de la troisième.

Etudions les cas où  $\varphi = \pi/2$ ;  $\varphi = \pi/3$  et  $\varphi = \pi/6$  :

Pour  $\varphi = \pi/3$  il y a trois réflexions  $\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v$  en plus de la rotation  $C_3$ .

$$\sigma'_v = \sigma_v C_3 \quad \text{et} \quad \sigma''_v = \sigma'_v C_3 = \sigma_v C_3^2$$

Pour  $\varphi = \pi/6$  on trouve de même six réflexions.

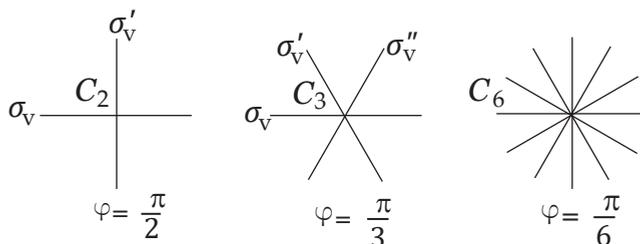


FIG. 1.8 – Cas particuliers suivant diverses valeurs de  $\varphi$ .

*Exercice*

Montrer la commutativité des différents produits suivants :

- 1) Deux réflexions dans des plans perpendiculaires.
- 2) Deux rotations d'angle  $\pi$  autour de deux axes concourants perpendiculaires.
- 3) Une rotation d'angle  $\varphi$  et une inversion par rapport à un point de l'axe de rotation.
- 4) Deux rotations successives autour d'un même axe.

# Symétrie et matière

## Théorie des groupes en physique de la matière

**Les propriétés physiques de la matière sont liées à la symétrie qui y règne. La théorie des groupes est l'outil mathématique de base permettant d'exploiter cette symétrie.**

Dans la nature, l'élégance que confère la symétrie à une fleur, à un cristal de neige ou à d'autres systèmes physiques, est pleinement révélée par la représentation qu'en donne la théorie des groupes dans l'espace des états de la physique quantique, en simplifiant des calculs souvent très compliqués.

Mais, et c'est là qu'on en découvre toute sa beauté, la théorie permet aussi de prévoir sans calcul un certain nombre de résultats.

L'étude quantique des groupes de transformation de symétries et de leur représentation dans l'espace des états a principalement trois objectifs :

- caractériser les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes,
- expliquer la levée de dégénérescence d'un niveau d'énergie, sous l'effet d'une perturbation,
- déterminer les règles de sélection des transitions entre niveaux d'énergie.

Des exercices corrigés illustrent les différents domaines de physique quantique vus sous le prisme de la symétrie.

Ce livre s'adresse aux étudiants en chimie physique, en physique atomique et en physique des solides.

### LES PLUS

- **Application de la théorie mathématique des groupes en physique de la matière**
- **Rappels des définitions et principaux théorèmes de la structure de groupe**
- **Plus de 60 schémas en deux couleurs**
- **24 exercices corrigés en détail**

**Joseph Cipriani** : Agrégé de physique. Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan. Maître de Conférences honoraire à Sorbonne Université.

**Pierre Peretti** : Professeur émérite à l'université Paris Cité. Ancien Directeur du Groupe de Recherche en Physique et Biophysique.

19,90 €

ISBN : 978-2-8073-5152-3



9 782807 351523

deboeck  
SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com