# MP–MPI
## Mathématiques · Informatique
## 2025

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Benjamin Monmege
enseignant-chercheur à l'université
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

William Aufort
professeur en CPGE

Antoine Barrier
ENS Paris-Saclay

Jason Bridoux
professeur agrégé

Sélim Cornet
professeur en CPGE

Vincent Danjean
enseignant-chercheur en école d'ingénieurs

Christophe Fiszka
professeur en CPGE

Sarah Houdaigoui
ENS Ulm

Loïc Jean
ENS de Lyon

Pierrick Le Vourc'h
ENS de Lyon

Titouan Leclercq
ENS de Lyon

Thierry Limoges
professeur en CPGE

Théotime Moutte
professeur agrégé

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Quentin Vermande
ENS Ulm

# Sommaire

**SESSION 2025** **MP8M**

e3a POLYTECH

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

# MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# e3a Mathématiques MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierrick Le Vourc'h (ENS de Lyon) ; il a été relu par Jason Bridoux (professeur agrégé) et Thierry Limoges (professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué de trois exercices indépendants abordant de nombreux domaines du programme.

- Le premier exercice étudie la minimisation de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^4$ sur un sous-espace affine. Il considère trois méthodes indépendantes d'optimisation. La première consiste à intégrer la contrainte dans l'expression de la fonction à optimiser. La deuxième voit la contrainte comme l'ensemble des zéros d'une certaine fonction et fait appel à un théorème de calcul différentiel pour conclure. La troisième méthode cherche à déplacer le problème sur un ensemble plus simple avant de retrouver la contrainte initiale par translation.
- Le deuxième exercice étudie un endomorphisme sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Les premières questions permettent de se familiariser avec cet endomorphisme à travers l'expression de sa matrice dans la base canonique pour différentes dimensions, l'étude de son inversibilité, le calcul de certaines de ses puissances et, enfin, une discussion sur son caractère diagonalisable. Le reste est consacré à l'étude des éléments propres de l'endomorphisme par l'exhibition de sous-espaces stables. Il faut noter que cet exercice est centré sur les racines $n$-ièmes de l'unité et leurs propriétés.
- Le dernier exercice étudie une série entière : son intervalle de convergence, la régularité de sa somme, ainsi que certains équivalents. Dans un second temps, il s'intéresse à une primitive d'une fonction faisant intervenir la somme étudiée précédemment. Après avoir vérifié que cette primitive est bien définie et régulière, le problème se penche sur les limites de la fonction aux extrémités de son intervalle de définition et montre qu'elle est bornée.

Ce sujet couvre une bonne partie du programme ; il est donc intéressant pendant les révisions. Le premier exercice donne en effet l'occasion de travailler le calcul différentiel, notamment le théorème d'optimisation sous une contrainte, qui tombe rarement, et, dans une moindre mesure, les espaces euclidiens. Le deuxième exercice demande d'être à l'aise avec les racines $n$-ièmes de l'unité, car il est souvent nécessaire de jongler entre plusieurs écritures. Il aborde des notions fondamentales du programme d'algèbre linéaire, en particulier la réduction. Le dernier exercice permet de travailler les raisonnements sur les séries entières. Plusieurs questions concernent les équivalents de fonctions, dont la rédaction est souvent subtile. Une décomposition en éléments simples y figure également, ce qui en fait un problème d'étude de fonctions plutôt complet. Les exercices sont d'un niveau de difficulté équilibré et nécessitent une bonne maîtrise des thèmes abordés afin de pouvoir être traités efficacement. Pour autant, rater une question n'est pas un gros handicap pour continuer à avancer. Ainsi, s'il est difficile de faire une rédaction parfaite d'un tel sujet en quatre heures, il est envisageable d'en traiter une bonne partie à condition de ne pas s'éterniser sur une question difficile.

**SESSION 2025** **MP1M1**

CONCOURS COMMUN INP

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières
MP et MPI

# MATHÉMATIQUES 1

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

# CCINP Maths 1 MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jason Bridoux (professeur agrégé) ; il a été relu par Youssef Yjjou (ENS de Lyon) et Thierry Limoges (professeur en CPGE).

Le sujet comporte deux exercices et un problème, tous indépendants.

- Dans le premier exercice, on s'intéresse à la connexité par arcs de $f'(\,]-1\,;1\,[\,)$ où $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$. Plus précisément, on montre que le caractère $\mathscr{C}^1$ est crucial.
- Le deuxième exercice propose deux méthodes pour déterminer la valeur minimale de la fonction
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto (2-x-y)^2+(1-x)^2+(1-2x-y)^2 \end{cases}$$
La première consiste à déterminer les éventuels points critiques et la matrice Hessienne de $f$ en ceux-ci. L'autre, plus géométrique, introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et le minimum de $f$ est alors la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Enfin, le problème est consacré au théorème de comparaison série-intégrale. Une démonstration guidée ainsi que des résultats qui en découlent sont donnés. Quelques exemples classiques, ainsi que des contre-exemples lorsque la fonction n'est pas monotone, sont étudiés.

Ce sujet utilise principalement des notions d'analyse du programme de MP-MPI, notamment le calcul différentiel et l'intégration. La maîtrise des suites et séries et du calcul intégral vus en première année est indispensable pour le traiter correctement. L'énoncé est plutôt linéaire et comporte beaucoup de questions intermédiaires. Ainsi, il est sans difficulté notable mis à part quelques questions techniques. C'est donc un bon sujet pour commencer ses révisions.

**SESSION 2025** **MP3M2**

CONCOURS COMMUN INP

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières MP et MPI

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

# MATHÉMATIQUES 2

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé d'un exercice d'informatique du tronc commun, d'un exercice et d'un problème de mathématiques.**

# CCINP Maths 2 MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Ferrari-Dominguez (ENS Ulm) et Christophe Fiszka (professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants. Seul l'exercice 1 diffère entre les filières MP et MPI.

- L'exercice 1 pour la filière MPI établit l'inégalité arithmético-géométrique puis l'applique pour obtenir

$$\det(\mathrm{A}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

  où A est une matrice réelle symétrique définie positive.
- L'exercice 1 pour la filière MP porte sur l'informatique de tronc commun. Il comporte quatre questions sur des graphes orientés et un test de coloration, proches du cours, et deux questions sur les bases de données. Les graphes sont ici représentés par un dictionnaire d'adjacence en langage Python.
- L'exercice 2 aborde les polynômes de Tchebychev, qui sont orthogonaux pour un certain produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$. C'est un classique des concours. Savoir retrouver des formules trigonométriques est la clé de plusieurs questions.
- Le problème étudie des matrices carrées de rang 1. Une première sous-partie explicite des exemples, certains en lien avec les probabilités. La deuxième partie caractérise la diagonalisabilité des matrices de rang 1 par leur trace et montre que deux telles matrices sont semblables si et seulement si elles ont même trace. On peut retrouver quelques questions sur ce thème dans le sujet PC Maths X 2025.

D'une longueur raisonnable, ce sujet utilise une grande variété de chapitres. L'analyse réelle et les matrices symétriques dans l'exercice 1 de l'énoncé MPI, les dictionnaires et les bases de données pour l'exercice 1 de l'énoncé MP, les polynômes, les espaces euclidiens et les intégrales impropres pour l'exercice 2, les probabilités et la réduction des endomorphismes dans le problème. Pris indépendamment, les exercices et le problème peuvent être travaillés en une à deux heures chacun, assez tôt dans l'année.

**SESSION 2025** **MP7IN**

# ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

# INFORMATIQUE

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est constitué d'un unique problème et comporte cinq parties qui ne sont pas complètement indépendantes.**

# CCINP Informatique optionnelle MP 2025 Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Danjean (enseignant-chercheur en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Titouan Leclercq (ENS de Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet a pour thème l'étude d'un réseau informatique dans un pays européen imaginaire : le Listenbourg. Les protocoles réseaux ne sont pas du tout abordés, seules les connexions (avec des graphes) et les capacités de ces connexions sont prises en compte. Les parties I et V n'utilisent que des notions de tronc commun.

- La partie I propose l'étude d'une base de données. Cette partie est indépendante des autres. On utilise le langage SQL.
- La partie II étudie des propriétés des arbres couvrants de poids maximal dans les graphes. Aucun langage de programmation n'est utilisé. Cette partie est utile pour les deux suivantes.
- La partie III demande de programmer en OCaml la recherche de l'arbre couvrant de poids maximal dans un graphe avec l'algorithme de Borůvka.
- La partie IV montre le lien entre la bande passante limite d'un réseau et l'arête de poids minimal de l'arbre couvrant de poids maximal dans un graphe connexe. Il n'y a pas d'algorithme à écrire dans cette partie.
- La partie V étudie des notions liées aux jeux à deux joueurs. Le langage utilisé est Python. Certaines questions sont assez faciles, mais comme elles sont à la fin du sujet, il faut avoir bien lu les parties précédentes pour pouvoir les aborder.

Les parties sont liées par la définition des concepts, mais relativement indépendantes dans leur traitement et elles ciblent des langages ou des parties différentes du programme.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

## MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

# Irrationalité de $\zeta(2)$

**Notations**

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
- Si $p$ est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $v_p(n)$ la valuation $p$-adique de $n$, c'est-à-dire le plus grand entier naturel $k$ tel que $p^k$ divise $n$.
- Si $x$ est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$. En d'autres termes,

$$\pi(x) = \operatorname{card}\left(\{p \text{ premier},\ p \leqslant x\}\right) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} 1$$

où $\operatorname{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini $A$.

## Partie A – Un encadrement de la fonction $\pi$

Le but de cette partie est d'établir l'encadrement suivant de la fonction $\pi$ :

$$\forall x \in [3, +\infty[ \qquad \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

### I – Calculs préliminaires

**Q1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{\substack{n+2 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2n+1}{n} \leqslant 4^n.$$

**Q2.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

*On pourra procéder par récurrence et effectuer l'hérédité en discutant suivant la parité de $n$.*

**Q3.** En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x.$$

**Q4.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} < 4^n.$$

# Centrale Maths 1 MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (professeur en CPGE) ; il a été relu par Antoine Barrier (ENS Paris Saclay) et Angèle Niclas (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet vise à démontrer l'irrationalité du nombre $\zeta(2)$, défini par

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Si le calcul de $\zeta(2)$ (qui vaut $\pi^2/6$) constitue un exercice classique des filières MP et MPI, l'originalité de ce problème réside dans le fait que la valeur de $\zeta(2)$ n'est jamais utilisée pour prouver son irrationalité.

- La partie A, indépendante des autres, porte sur le théorème de répartition des nombres premiers :

  $$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$$

  où $\pi(x)$ désigne, pour $x \in [\,1\,;+\infty\,[$, le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à $x$. La preuve de ce théorème étant ardue, on démontre dans cette partie une version plus faible :

  $$\forall x \geqslant 3 \qquad \frac{\ln(2)}{6}\frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4\frac{x}{\ln(x)}$$

- La partie B vise à majorer le PPCM des $n$ premiers entiers par $3^n$. Ce résultat sera utilisé dans la partie E.
- La partie C amène à la démonstration d'un critère d'irrationalité dû à Dirichlet : un réel est irrationnel s'il peut être approché par une suite de rationnels avec une vitesse de convergence négligeable devant la vitesse de croissance du dénominateur.
- La partie D établit une expression de $\zeta(2)$ faisant intervenir des intégrales doubles. Elle est indépendante de la partie C.
- Enfin, dans la partie E, on démontre l'irrationalité de $\zeta(2)$ à l'aide du critère de la partie C.

C'est un sujet bien structuré, de bon niveau, mais qui souffre de plusieurs défauts : il contient une erreur d'énoncé (question 9), la difficulté des questions est rarement progressive, et l'énoncé demande d'admettre plusieurs résultats. L'arithmétique est à l'honneur, ce qui est rare dans les sujets d'écrit : c'est par conséquent un bon support pour travailler ce chapitre mal aimé. Des raisonnements classiques d'analyse y sont également mis en œuvre.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 2

## MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

# Étude d'un modèle probabiliste de ferromagnétisme

## Notations et rappels

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $E_1,\dots,E_n$ désignent des ensembles finis, et si $a$ est une fonction définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ et à valeurs réelles, alors on note

$$\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n} a(x_1,\dots,x_n) = \sum_{x_1\in E_1}\sum_{x_2\in E_2}\cdots\sum_{x_n\in E_n} a(x_1,\dots,x_n).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que, pour un $n$-uplet $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires réelles finies sur un univers $\Omega$, la **formule de transfert** s'écrit : pour toute fonction $f$ définie sur $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$ et à valeurs réelles,

$$\mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_n)\big) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathbb{P}\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on note $\Lambda_n$ l'ensemble $\{-1,1\}^n$.
- Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients réels. Si $n=p$, on obtient l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille $n$, et on note $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## Problématique et objectifs

On étudie un modèle de ferromagnétisme : un matériau est constitué de particules qui peuvent, chacune, être orientées dans un sens ou un autre, Nord ($+1$) ou Sud ($-1$). Elles sont soumises, d'une part à un champ magnétique extérieur, d'autre part à une température extérieure qui a tendance à les agiter dans tous les sens, et enfin à une interaction locale qui a tendance à les aligner dans le même sens.

Dans tout le sujet, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\beta$ est un réel strictement positif, qui représente l'inverse de la température.

On considère une matrice symétrique $J_n = (J_n(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice d'interaction. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $J_n(i,j)$ mesure l'interaction entre les particules numérotées $i$ et $j$.

On définit une fonction $H_n$ sur $\mathbb{R}_+\times\Lambda_n$ par

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n,\quad \forall h\in\mathbb{R}_+,\qquad H_n(h,x) = -\frac{\beta}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)\,x_i\,x_j - h\sum_{i=1}^n x_i.$$

Pour tous $x\in\Lambda_n$ et $h\in\mathbb{R}_+$, $H_n(h,x)$ mesure l'énergie de la configuration $x$ couplée avec un champ magnétique extérieur d'intensité $h$. Le premier terme dans son expression est l'interaction locale des particules.

On définit alors, $h$ étant fixé, un $n$-uplet de variables aléatoires $\big(X_{n,1},X_{n,2},\dots,X_{n,n}\big)$ tel que, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n$, la probabilité que $\big(X_{n,1},X_{n,2},\dots,X_{n,n}\big)$ prenne la valeur $x$ est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-H_n(h,x)}$, c'est-à-dire que, pour tout $x\in\Lambda_n$,

$$\mathbb{P}\Big(X_{n,1}=x_1,X_{n,2}=x_2,\dots,X_{n,n}=x_n\Big) = \frac{1}{Z_n(h)}\,\mathrm{e}^{-H_n(h,x)},$$

où

$$Z_n(h) = \sum_{y=(y_1,\dots,y_n)\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{-H_n(h,y)}.$$

# Centrale Maths 2 MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Théotime Moutte (professeur agrégé) ; il a été relu par Jan-Luka Fatras (professeur agrégé) et Julie Gauthier (professeur agrégé).

Ce sujet propose une étude assez large de différents modèles probabilistes de ferromagnétisme à travers l'étude de leurs mesures de Gibbs. La première partie s'attache à l'aspect algébrique du problème, en étudiant notamment le spectre de différentes matrices d'interaction et en les représentant sous forme de graphe. La seconde partie opère une étude de fonctions pour déterminer la magnétisation spontanée dans différents modèles probabilistes du ferromagnétisme. Les probabilités n'arrivent réellement que dans la dernière sous-partie, avec la démonstration d'une convergence en loi.

- Le comportement des modèles ferromagnétiques est déterminé par une certaine matrice symétrique, appelée matrice d'interaction. Dans cette première partie, on établit ses propriétés algébriques pour différents modèles. En particulier, on détermine son spectre et on donne sa représentation sous forme de graphe. Les modèles de Curie-Weiss, sinus et surtout d'Ising en dimension 1 sont d'abord étudiés. L'introduction du produit tensoriel permet ensuite de traiter le modèle d'Ising en dimension 2.
- La seconde partie propose de déterminer la magnétisation spontanée des modèles d'Ising et de Curie-Weiss en fonction de paramètres des modèles. Il s'agit principalement d'étudier une fonction, dite fonction de pression, d'en déterminer une expression plus pratique à analyser et d'étudier sa convergence. La dernière sous-partie propose de déterminer la convergence en loi d'une certaine variable aléatoire dans un cas particulier, en utilisant principalement des arguments d'analyse.

Ce sujet est une très bonne introduction aux modèles probabilistes de ferromagnétisme, domaine actif et intéressant de la recherche en mathématiques. Il permet de réviser un panorama assez large de l'analyse : variations de fonctions, intégrales ou encore fonctions trigonométriques. Il fait également intervenir de nombreux arguments d'algèbre linéaire, en particulier concernant le spectre et la diagonalisation de matrices. Bien que ce sujet porte sur un problème probabiliste, très peu de connaissances en probabilités y sont réellement mobilisées. Les questions sont très calculatoires et peuvent comporter des difficultés, notamment les manipulations d'indices avec le produit tensoriel.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Option informatique

**MP**

4 heures Calculatrice autorisée

**2025**

## Meilleurs itinéraires dans un réseau ferroviaire

La recherche de l'itinéraire le plus court entre deux points d'un graphe pondéré est un problème facilement résolu par plusieurs algorithmes. Cette recherche est plus difficile dans un réseau ferroviaire, où les trajets sont restreints par des horaires de départ et d'arrivée à chaque arrêt, et du fait de l'existence de correspondances.

De plus, la notion de « meilleur trajet » se fait souvent en considérant non pas uniquement la durée totale du trajet, mais également d'autres critères tels que le prix du billet, le nombre de correspondances, l'heure de départ, les services à bord, etc. Il est rare d'obtenir un trajet qui minimise simultanément tous les critères : la minimisation d'un critère particulier se faisant souvent au détriment d'un autre. Certains trajets sont cependant moins bons sur tous les critères : ceux-ci n'ont pas besoin d'être considérés.

Ce sujet comporte quatre parties :

– la partie I étudie l'implémentation d'une file de priorité et d'un tri par tas ;

– la partie II définit et étudie la notion d'optimum de Pareto. Les notations introduites dans cette partie sont utilisées dans les parties suivantes ;

– la partie III étudie le calcul d'optimums de Pareto dans le cas d'un langage sur un alphabet fini ;

– la partie IV étudie le calcul d'optimums de Pareto dans un graphe pondéré.

Les parties III et IV sont indépendantes.

On trouvera dans l'annexe A en page 10 quelques points de rappels de syntaxe et de fonctions OCaml.

**Consignes aux candidates et candidats** Il doit être répondu aux questions de programmation en utilisant le langage OCaml. En cas d'écriture d'une fonction non demandée par l'enoncé, il doit être précisé son rôle, ainsi que sa signature (son type). Lorsque cela est pertinent, la description du fonctionnement des programmes qui ont été écrits est également incitée. On autorise toutes les fonctions des modules `Array` et `List`, ainsi que les fonctions de la bibliothèque standard (celles qui s'écrivent sans nom de module, comme `max`, `failwith` ainsi que les opérateurs comme `@`). Sauf précision de l'énoncé, l'utilisation d'autres modules est interdite.

Lorsqu'une question de programmation demande l'écriture d'une fonction, la signature de la fonction demandée est indiquée dans la question. Les candidates et candidats peuvent écrire une fonction dont la signature est compatible avec celle demandée. Par exemple, si l'énoncé demande l'écriture d'une fonction `int list -> int` qui renvoie le premier élément d'une liste d'entiers, écrire une fonction `'a list -> 'a` qui renvoie le premier élément d'une liste d'éléments quelconques sera considéré comme correct.

Il est possible d'admettre le résultat d'une question, y compris de supposer qu'une fonction demandée a été écrite, afin de traiter les questions suivantes.

# I – Une file de priorité

L'objectif de cette première partie est d'implémenter une file de priorité persistante en utilisant une structure de tas d'appariement. Cette structure de tas permet également d'obtenir un tri de complexité optimale.

On peut voir les tas d'appariement comme des arbres $n$-aires auto-ajustés, c'est-à-dire pour lesquels les opérations sur la structure de données réorganisent l'arbre tout en réalisant globalement une forme d'ajustement. Ils disposent d'une implémentation très simple, tout en étant efficace en pratique, par exemple pour une utilisation comme file de priorité dans l'algorithme de Dijkstra, qui sera étudié dans la partie IV.

Contrairement à une implémentation classique en utilisant un tas binaire implémenté dans un tableau, les opérations sur un tas d'appariement à $n$ éléments pourront avoir un coût en $\mathcal{O}(n)$ dans le pire cas. Cependant, on peut montrer qu'une séquence de $n$ opérations consécutives sur cette structure de données a un coût total en $\mathcal{O}(n \log n)$, ce qui rend l'utilisation de cette structure tout aussi efficace lorsque l'on effectue une séquence d'opérations.

# Centrale Informatique optionnelle MP 2025 Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Danjean (enseignant-chercheur en école d'ingénieurs) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Dans un problème d'optimisation portant sur plusieurs critères, il est rare de trouver une solution optimale selon tous les critères considérés. Dans un réseau de transport par exemple, on peut chercher à minimiser le prix payé, le temps de trajet ou l'impact environnemental. Certaines plateformes proposent alors plusieurs itinéraires « optimaux », dans le sens ou aucun autre trajet n'est meilleur selon l'ensemble des critères. La notion d'optimum de Pareto développée tout au long du sujet permet de formaliser cette idée. Plus précisément,

- La partie I propose d'implémenter une file de priorité à l'aide d'une structure de tas d'appariement. Elle comporte des questions de programmation plutôt abordables, ainsi que quelques questions de complexité. On établit notamment que la plupart des opérations sur cette structure sont de complexité constante, à l'exception de la suppression du plus petit élément.
- La partie II entre dans le vif du sujet en introduisant formellement la notion d'optimum de Pareto dans un ensemble partiellement ordonné. La recherche algorithmique des optimums de Pareto y est ensuite étudiée dans différents cas, notamment celui de la dimension 2. Là encore, les questions de programmation ne posent pas de difficulté notable, contrairement à quelques questions d'analyse d'algorithmes demandant des preuves soigneuses.
- La partie III généralise la notion d'optimum de Pareto aux éléments minimaux d'un langage. L'objectif principal de cette partie est de montrer que si L est un langage régulier, alors l'ensemble des éléments minimaux de L est aussi un langage régulier. La preuve proposée utilise des automates finis : cette stratégie est relativement classique mais nécessite une certaine rigueur dans la rédaction pour être rondement menée.
- Enfin, la partie IV s'intéresse à la recherche des meilleurs chemins dans un réseau ferroviaire. Une adaptation de l'algorithme de Dijkstra pour la détermination des optimums de Pareto est proposée, utilisant notamment la structure implémentée dans la partie I. La plupart des questions de cette partie ont pour but d'établir la terminaison et la correction de l'algorithme.

La thématique abordée est originale et permet de balayer plusieurs parties du programme de l'option informatique : arbres, langages et automates, graphes et analyse des algorithmes. Le sujet était trop long pour être traité en entier, comme souvent sur le concours Centrale. Il fallait notamment faire un choix entre les parties 3 et 4, contenant toutes deux des questions de preuves délicates à rédiger. Il s'agit donc à bien des égards d'un très bon sujet de révisions.

**A2025 – MATH I MP**

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,**
**ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,**
**TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,**
**MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,**
**IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,**
**CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,**
**Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

**CONCOURS 2025**

# PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Durée de l'épreuve : 3 heures**

**L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*MATHÉMATIQUES I - MP*

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières
MP et MPI

*L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

.

# Mines Maths 1 MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Jean (ENS de Lyon) ; il a été relu par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

---

Parmi les normes usuelles au programme figurent les « normes $p$ », dont l'exposant reflète intuitivement l'importance accordée aux valeurs extrêmes du vecteur, de la fonction ou de la variable aléatoire dont on considère la norme.

Ce sujet étudie ces différentes normes sur certains espaces fonctionnels. En particulier, on y traite des inégalités de Khintchine, qui explorent le lien entre les normes $p$ sur l'espace vectoriel engendré par une suite de variables de Rademacher indépendantes.

- La première partie redémontre l'inégalité de Hölder pour les variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini.
- La deuxième partie propose de démontrer, sans la nommer, l'inégalité de Hoeffding pour un cas particulier. Il s'agit d'une inégalité de concentration dont la démonstration repose sur l'inégalité de Markov et sur des techniques élémentaires d'optimisation.
- La troisième partie traite des inégalités de Khintchine reliant les normes $\|\cdot\|_p$ d'une classe de variables aléatoires à leur norme $\|\cdot\|_2$. Elles sont remarquables car les bornes obtenues ne dépendent pas de la dimension $n$ de l'espace considéré.
- La quatrième partie utilise le fait que les bornes obtenues dans la partie précédente sont indépendantes de la dimension pour exhiber un sous-espace de dimension infinie de $\mathrm{L}^0(\Omega)$ sur lequel toutes les normes $(\|\cdot\|_p)_{p\in[\,1\,;\,+\infty\,[}$ sont équivalentes.
- La cinquième et dernière partie propose de démontrer l'existence d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ présentant des contraintes plus fines sur les constantes reliant les normes $\|\cdot\|_1^{\mathbb{R}^n}$ et $\|\cdot\|_2^{\mathbb{R}^n}$.

Ce problème est centré sur le programme de MP-MPI, à la fois du point de vue des espaces vectoriels normés et de la théorie des probabilités. On y établit aussi des inégalités de concentration qui sont de bons outils pour manipuler les probabilités. La première partie utilise le programme, la deuxième en est une jolie application, qu'il est bon de connaître, tandis que les trois dernières traitent de résultats plus spécifiques. Tout le sujet constitue un bon entraînement au maniement d'inégalités.

**A2025 – MATH II MP**

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,**
**ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,**
**TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,**
**MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,**
**IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,**
**CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,**
**Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

**CONCOURS 2025**

**DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*MATHÉMATIQUES II - MP*

NOTE DE L'ÉDITEUR
Le sujet était commun aux filières MP et MPI

*L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

.

# Mines Maths 2 MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (professeur en CPGE) ; il a été relu par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

---

Le sujet est consacré au critère de Schur-Cohn qui permet de calculer le nombre de racines dans $]-1\,;1\,[$ d'un polynôme $p$ à partir du nombre de valeurs propres strictement positives de la matrice symétrique

$$\mathrm{J}(p) = p_0(\mathrm{S})^\top p_0(\mathrm{S}) - p(\mathrm{S})^\top p(\mathrm{S})$$

où $p_0$ est le polynôme réciproque de $p$ (obtenu par permutation des coefficients de $p$) et S une matrice nilpotente.

Le sujet est composé de 7 parties pour 28 questions. Les parties sont très liées et il convient de les traiter dans l'ordre.

- Dans la partie A, on établit quelques propriétés des polynômes réciproques et leur lien avec les racines de $p$ qui sont stables par passage à l'inverse. C'est l'occasion de réviser l'arithmétique des polynômes.
- La seconde partie, assez technique, prouve un lemme sur la liberté d'une famille de polynômes.
- La troisième partie, qui utilise essentiellement le calcul matriciel, permet d'établir le lien entre l'existence d'une racine stable d'un polynôme $p$ et l'inversibilité de la matrice $\mathrm{J}(p)$.
- À l'aide des parties précédentes, les quatrième et cinquième parties prouvent le critère de Schur-Cohn en utilisant des résultats d'algèbre linéaire et bilinéaire. En particulier, les questions 15 à 17 permettent d'établir que pour une matrice symétrique M fixée, le maximum des dimensions des sous-espaces vectoriels F de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{F} \smallsetminus \{0_{n,1}\} \qquad \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} > 0$$

  correspond exactement au nombre de valeurs propres de M dans $\mathbb{R}_+^*$.
- L'avant-dernière partie traite d'un cas particulier où $p = \pm\, p_0$. Alors que les premières parties étaient plutôt algébriques, on utilise ici des arguments de continuité et de dérivabilité pour des fonctions vectorielles.
- Enfin, la dernière partie conclut sur l'algorithme de Schur-Cohn permettant de calculer le nombre de racines dans $]-1\,;1\,[$ sans condition particulière sur le polynôme.

Le thème de ce problème est intéressant. Il permet de traiter de nombreux chapitres au programme des deux années. Les questions sont très variées, par leur difficulté mais aussi par les outils utilisés (arithmétique des polynômes, calcul matriciel, diagonalisation, algèbre bilinéaire, continuité/dérivabilité...). Comme les parties sont liées, il fallait prendre le temps de comprendre le cheminement de l'énoncé afin de pouvoir utiliser des résultats des premières parties dans les parties suivantes. Ce problème constitue un très bon sujet pour la fin de la période des révisons.

**A2025 – INFO COMMUNE**

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,**
**ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,**
**TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,**
**MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,**
**IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,**
**CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,**
**Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

**CONCOURS 2025**

# ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

**Durée de l'épreuve : 2 heures**

**L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*INFORMATIQUE COMMUNE*

*Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 14 pages de texte.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

.

# Mines Informatique MP-PC-PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet aborde le problème du sac à dos, un classique de l'optimisation où l'on doit choisir des objets selon leur poids et leur valeur pour les emporter dans un sac de capacité limitée, en maximisant la valeur totale. Il décrit puis compare cinq algorithmes différents permettant de trouver une solution.

- Dans la partie I, on aborde le traitement des bases de données dans le cas de navires de fret. Comme bien souvent, ce type de partie totalement déconnectée du reste du sujet n'est qu'un prétexte à la rédaction de quelques requêtes plus ou moins triviales.
- La partie II demande l'écriture de deux fonctions élémentaires permettant de calculer la valeur d'une collection d'objets et de vérifier que celle-ci satisfait la contrainte de poids.
- Le remplissage du sac peut être modélisé par un arbre binaire. La partie III utilise cette structure pour proposer l'écriture d'un algorithme naïf de résolution du problème, de complexité hélas exponentielle.
- La partie IV définit et applique un algorithme glouton sur un exemple simple de trois objets. La complexité de l'algorithme est analysée.
- Dans la partie V, on utilise la programmation dynamique. Le code est ici entièrement fourni, seule une application sur l'exemple est demandée.
- La partie VI utilise la structure d'arbre binaire pour appliquer un algorithme par séparation et évaluation, qui consiste à élaguer les branches inutiles de l'arbre.
- Un dernier algorithme, plus complexe, est développé dans la partie VII. Il s'agit d'une « optimisation par colonies de fourmis », qui reproduit le comportement biologique de ces insectes dans l'élaboration de la solution. La structure générale du code est proposée et on demande de la compléter.
- La dernière partie permet de comparer les résultats des différents algorithmes sur une situation plus complexe que l'exemple traité précédemment.

Cette épreuve traite avec cohérence un problème classique, avec des algorithmes connus et d'autres plus originaux. De nombreuses questions demandent d'exécuter du code sur de petits exemples. Si le découpage en nombreuses parties rend le sujet quelque peu haché, l'optimisation par colonies de fourmis est bien amenée et travaillée en profondeur. On peut regretter l'utilisation d'arbres binaires, outil hors programme dont le vocabulaire et les spécificités étaient inconnus de la plupart des candidats.

**A2025 – INFO MP**

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,**
**ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,**
**TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,**
**MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,**
**IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,**
**CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,**
**Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

**CONCOURS 2025**

**ÉPREUVE D'INFORMATIQUE MP**

**Durée de l'épreuve : 3 heures**

**L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*INFORMATIQUE - MP*

*Cette épreuve concerne uniquement les candidats de la filière MP.*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 10 pages de texte.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

.

# Mines Informatique optionnelle MP 2025 Corrigé

Ce corrigé est proposé par Titouan Leclercq (ENS de Lyon) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet propose de construire un algorithme qui génère un automate reconnaissant un langage régulier L. Ce dernier est inconnu, mais on dispose d'un oracle qui peut dire si un mot donné appartient à L et si un automate donné reconnaît le langage L. Cette construction se base sur les notions de séparabilité de mots et d'arbre discriminant, qui sont étudiées durant le sujet.

- Dans la partie I, on définit les structures élémentaires dont on aura besoin ainsi que plusieurs fonctions usuelles liées aux automates.
- Dans la partie II, on étudie la relation de séparabilité entre les mots par rapport à un langage fixé. L'objectif est de montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence pour cette relation d'inséparabilité.
- La partie III examine les arbres discriminants, une structure de données permettant de traiter efficacement des classes d'inséparabilité pour un langage.
- Enfin, la partie IV utilise des arbres discriminants particuliers, appelés cribles, pour construire un automate à partir de requêtes telles que décrites ci-dessus. Le sujet se conclut sur l'écriture d'un algorithme complet donnant un automate reconnaissant le langage à apprendre. On montre que cet automate possède un nombre minimal d'états.

Ce sujet est une bonne occasion de travailler ou de réviser les automates et les langages réguliers, puisqu'il traite la plupart de leurs aspects, ainsi que les arbres car ils sont au centre de la construction de l'automate. Les questions sont très liées entre elles. En particulier, les codes à écrire en OCaml réutilisent souvent des fonctions précédemment écrites.

**ECOLE POLYTECHNIQUE**
**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2025**

**LUNDI 14 AVRIL 2025**
**08h00 - 12h00**

**FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 1**

**MATHEMATIQUES A (XULSR)**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve***

# X/ENS Maths A MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Vermande (ENS Ulm) ; il a été relu par Sélim Cornet (professeur en CPGE) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

---

Ce sujet propose deux variations sur le théorème de décomposition de Jordan et quelques applications. Ce théorème affirme que toute matrice à coefficients complexes est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$ où $\mathrm{J}_n$ est la matrice qui a des 1 sur la sous-diagonale et des 0 ailleurs.

- La partie I introduit quelques résultats généraux sur les restrictions d'endomorphismes à des sous-espaces stables et sur la suite des noyaux itérés d'un endomorphisme.
- La partie II décrit un prototype d'espace cyclique d'un endomorphisme nilpotent à l'aide des polynômes de Laurent.
- La partie III compare un endomorphisme nilpotent et l'endomorphisme considéré à la partie II à l'aide d'une application linéaire entre les espaces sous-jacents. Elle propose de montrer comment étendre cette application lorsqu'elle n'est définie que sur un sous-espace.
- La partie IV fait démontrer le théorème de Jordan pour les endomorphismes nilpotents.
- La partie V introduit une variation sur le théorème de Jordan, où l'on fait simultanément la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et la diagonalisation d'un autre endomorphisme.
- La partie VI utilise les résultats précédents pour classifier des couples de matrices.

Ce sujet traite essentiellement d'algèbre linéaire et de réduction des endomorphismes, avec quelques questions d'arithmétique des polynômes dans la partie III. Les questions ne reposent pas directement sur le cours et rarement sur des calculs directs, mais demandent d'être capable de raisonner et d'utiliser de manière pertinente les résultats du cours et des questions précédentes. Elles demandent de bien comprendre les objets manipulés et notamment d'être capable de décrire des endomorphismes dans des bases bien choisies. Toutes les parties contiennent des questions faciles ; les questions les plus longues et les plus difficiles se concentrent en fin de partie, à partir de la partie III.

# ECOLE POLYTECHNIQUE

## CONCOURS D'ADMISSION 2025

**MARDI 15 AVRIL 2025**
**08h00 - 12h00**

**FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 3**

**MATHEMATIQUES B (X)**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve***

# X Maths B MP-MPI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Barrier (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Angèle Niclas (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

---

Ce problème porte sur l'étude d'un polynôme interpolant une fonction $f$ en $m$ points et dont les dérivées interpolent celles de $f$ aux mêmes points. On démontre notamment des propriétés de conservation de diverses notions de positivité. On considère d'abord des fonctions absolument monotones, c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^\infty$ et dont les dérivées à tous ordres sont positives, puis les fonctions dites de type positif, qui sont caractérisées par des matrices carrées symétriques positives.

- Dans la partie I, on définit un polynôme $\mathrm{H}(f)$ interpolant en $m$ points $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une fonction $f$ et dont les dérivées interpolent celles de $f$ à des ordres $(k_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ fixés. On établit plusieurs propriétés de ce polynôme interpolateur, et on montre que si $f$ est absolument monotone, alors l'application
$$\mathrm{Q}(f) = \frac{f - \mathrm{H}(f)}{\prod\limits_{i=1}^{m} (\mathrm{X} - t_i)^{k_i}}$$
est aussi absolument monotone.
- On s'intéresse dans la deuxième partie aux propriétés de familles de polynômes orthogonaux associées à des produits scalaires dépendant d'une fonction de poids $f$ et de réels $r_1 > \cdots > r_n$. Des résultats généraux sur les polynômes orthogonaux sont étudiés, avant de démontrer que certains polynômes associés aux $(r_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ont des coefficients positifs dans une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, résultat qui sera utile en fin de sujet.
- La troisième partie concerne un cas particulier du produit scalaire défini dans la deuxième partie. Au moyen de séries entières, on détermine une base de polynômes orthogonaux (pour ce produit scalaire) dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
- Enfin, la quatrième partie définit les fonctions de type positif en dimension N, pour lesquelles des propriétés de stabilité sont établies. En regroupant les résultats des trois parties précédentes, on montre finalement que le polynôme d'interpolation $\mathrm{H}(f)$ associé aux racines du dernier polynôme de la base obtenue en partie III est une fonction de type positif en dimension N.

Le sujet couvre une vaste partie du programme d'analyse des deux années, notamment les polynômes, l'intégration et les séries entières. Bien que les premières questions de chaque partie soient plutôt abordables, presque toutes nécessitent une réflexion significative ainsi qu'une rédaction rigoureuse, ce qui limite le temps à consacrer aux questions plus avancées. Le nombre important d'objets et de notations n'aide pas non plus à s'imprégner facilement du sujet, et rend les dernières questions de chaque partie assez techniques.

**ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI**
**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2025**

**JEUDI 17 AVRIL 2025**
**16h30 - 18h30**

**FILIERES MP-PC-PSI**
**Epreuve n° 8**

# INFORMATIQUE B (XELSR)

***Durée : 2 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve***

# X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2025 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Le sujet examine le jeu de Röckse qui consiste à trouver, dans une grille de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ contenant des gains et des pénalités, un chemin optimal partant de $(0, 0)$ et arrivant à $(\mathrm{N}-1, \mathrm{N}-1)$. Il se compose de quatre parties, de difficulté globalement croissante, et dont la dernière est indépendante des autres.

- La partie I vise à écrire plusieurs fonctions simples permettant de se familiariser avec le jeu. Une propriété des sauts autorisés dans la grille est également définie.
- La partie suivante tente une recherche exhaustive en explorant tous les chemins possibles d'une certaine longueur. Une analyse de complexité permet de montrer l'inefficacité de cet algorithme pour des chemins longs. On utilise ensuite brièvement la programmation dynamique pour améliorer la complexité de l'algorithme.
- La partie III propose de résoudre le problème à l'aide d'un algorithme glouton. Elle ne comporte que deux questions.
- La dernière partie est indépendante des trois autres. L'utilisation de codes binaires est abordée afin de stocker efficacement les cases bonus rencontrées. Le sujet guide ensuite progressivement le candidat dans la construction d'un algorithme de programmation dynamique : déterminer la formule de récurrence, énumérer l'ensemble des codes binaires possibles, compléter le code de la fonction principale, donner sa complexité et, finalement, extraire de la table de programmation dynamique le chemin optimal.

Le sujet se focalise sur l'algorithmique des listes. Il permet notamment de travailler les algorithmes de recherche exhaustive et leur complexité (partie II) et les algorithmes gloutons (partie III). La dernière partie comporte des questions de natures variées et, bien que progressive et guidée, elle demande une compréhension fine de la programmation dynamique. Certaines questions sont de haut niveau.