Annales des Concours

PC
Mathématiques · Informatique
2021

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

Sélim Cornet
professeur en CPGE

Guillaume Duboc
ENS Lyon

Julien Dumont
professeur en CPGE

Thierry Limoges
professeur en CPGE

David Michel
professeur agrégé

Angèle Niclas
ENS Lyon

Rémi Pellerin
ENS Lyon

Tristan Poullaouec
professeur en CPGE

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Sommaire thématique de mathématiques

2015 – 2021

	Structures algébriques et arithmétique	Polynômes	Algèbre linéaire générale	Réduction des endomorphismes	Produit scalaire et espaces euclidiens	Topologie des espaces vectoriels normés	Suites et séries numériques	Suites et séries de fonctions	Séries entières	Analyse réelle	Intégration	Équations différentielles	Fonctions de plusieurs variables	Dénombrement et probabilités	Informatique pour tous
e3a MP Maths 1 (2021)		•	•	•	•		•	•		•	•			•	
e3a PC Maths 1 (2021)			•		•			•			•				
e3a PSI Maths 1 (2021)		•	•	•					•		•	•		•	
CCINP MP Maths 1	•	•	•		•	•	•••	•••••••	••••	•••	••••••		•	•••••	••
CCINP MP Maths 2	•••	••••	•••••	•••••••	•••••	••					•	•		•	•••
CCINP PC Maths		•••	•••	•••	••	••		••	•••		•••••	•	•	••••••	
CCINP PSI Maths			•••••	•••••	•	•	•••	•	••••	•••	••••	••••	•	••	
Centrale MP Maths 1	•	••	••••	•••••	•	••	••	•	•	••	••	•		••	
Centrale MP Maths 2		•	••	•	•	••	•••	•••	•••	••	••••••	••	••	•••	
Centrale PC Maths 1	•	••	••••	••••	•••				••••		••	•	•	••••	
Centrale PC Maths 2	•	••	•		•		••	••••	•••	•••	••••			••••	
Centrale PSI Maths 1		••	••••	••••		••	•••	••	•	••		•	•	••••••	••
Centrale PSI Maths 2		••	•••	•			••	••	•••	•••	••••	••	•	•••••	
Mines MP Maths 1	•		•••	•••	••	•	•••	•	••	••	••	••		•••••	
Mines MP Maths 2		•••	•••	••	•••	•••	•••	•••	•	••	•••	•	•	••	
Mines PC Maths 1		•	•••	•			•••	••	••	•••	•	•		••••••	
Mines PC Maths 2		••	••		•		••	•	••	•••	••••	••	•	•	
Mines PSI Maths 1			•••	•			••	••	••	•••	•	•		••••••	
Mines PSI Maths 2		••	••••	•••	••	••	•	•		•••	•••	•		•	
X/ENS MP Maths A	•••	•••••	••••••	•••••	••	••••	••		••	••					
X/ENS MP Maths B	•	••			••	•	•••	•••	••	••••••	••••••	•	•	•••	
X/ENS PC Maths		••	•••	•••	••	••				•••	•••		•	•••	
X/ENS PSI Maths		•••	••••	•	••	••	•	•	•	••••	•	•	•		

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2021 **PC8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur de la somme : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.
On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

6. En déduire $\text{Ker}(L)$.

7.

7.1. Calculer $L(e_0)$.

7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\, L(e_k)$.

7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

8. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

9. Recherche des sous-espaces propres de L
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.

9.2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ $(*)$.

9.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10. Comparer L^{-1} et $D+$ Id.

11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L.

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?

(1) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $\dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.

2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

e3a Mathématiques PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (ENS Lyon) ; il a été relu par Antoine Barrier (ENS Paris-Saclay) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Le sujet comporte quatre exercices indépendants portant sur l'analyse et l'algèbre.

- L'exercice 1 a pour objet le calcul de la somme de deux séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

  Cet exercice demande une bonne maîtrise des théorèmes d'intégration terme à terme et des conditions de convergence d'une série.

- Le deuxième exercice s'intéresse à l'application linéaire L qui associe, à tout polynôme $f \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$$

  Après une question de cours, on prouve que L est un endomorphisme puis un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, avant de rechercher ses éléments propres. Cet exercice nécessite de la dextérité dans le maniement des espaces vectoriels de fonctions.

- L'exercice 3 étudie deux suites définies par une relation de récurrence double

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

  On prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, dont on connaît une expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction du nombre d'or. Après avoir mis le problème sous forme matricielle, on s'intéresse à des suites et des séries de matrices dont on calcule les limites.

- Le dernier exercice étudie un produit scalaire introduit dans l'énoncé. On redémontre des résultats généraux sur les polynômes d'interpolation de Lagrange, avant de s'intéresser à des projetés orthogonaux sur un sous-espace vectoriel.

Le sujet aborde un grand nombre de chapitres du programme des deux années de classes préparatoires et constitue un bon exercice de révision générale de l'ensemble du cours. Il ne présente pas de difficulté majeure et les questions sont très guidées.

Indications

Exercice 1

1.1 Appliquer le théorème spécial des séries alternées.

1.2.1 Poser $f_n(x) = x^{2n}(1-x)$ et utiliser le théorème d'intégration terme à terme dont l'une des hypothèses est

$$\sum \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

1.2.2 Utiliser le résultat de la question 1.2.1 puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1.3 Reconnaître une série entière et calculer son rayon de convergence avec la règle de d'Alembert.

1.4.2 Utiliser un théorème d'intégration terme à terme comme dans la question 1.2.1 puis le résultat de la question 1.4.1.

Exercice 2

2.1 Définir le taux d'accroissement $\tau(h)$ de F_1 entre x et $x+h$ et remarquer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un réel x_h vérifiant $|x_h - x| \leqslant |h|$ et $\tau(h) = f(x_h)$.

2.2 Décomposer F en deux parties afin d'utiliser le résultat de la question 2.1 pour $a = 1$.

2.3 Montrer que $f_k(t) \underset{t\to-\infty}{=} \mathrm{o}(1/t^2)$ en utilisant les croissances comparées.

2.4 Montrer que l'application L est bien définie en utilisant le résultat de la question 2.2.

2.5 Utiliser le résultat de la question 2.2 pour dériver g.

2.6 Appliquer le résultat de la question 2.5 à $g = \mathrm{L}(f) = 0_{\mathrm{E}_n}$.

2.7.2 Calculer $\mathrm{L}(e_{k+1})$ à l'aide d'une intégration par parties.

2.7.3 Procéder par récurrence en utilisant le résultat des questions 2.7.1 et 2.7.2 pour montrer que $\mathrm{L}(e_k) \in \mathrm{E}_n$ pour tout $k \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$.

2.8 Remarquer que E_n est de dimension finie et utiliser le résultat de la question 2.6.

2.9.2 Appliquer le résultat de la question 2.5 à $g = \lambda f = \mathrm{L}(f)$.

2.9.4 Considérer une solution polynomiale de $(*)$ et chercher son degré en fonction de la valeur de λ.

2.9.5 Utiliser le résultat des questions 2.9.2 et 2.9.4 pour trouver les vecteurs propres.

2.10 Utiliser le résultat de la question 2.5.

2.12 Utiliser le résultat de la question 2.11.

Exercice 3

3.1 Utiliser les relations entre coefficients et racines.

3.2.2 Écrire la forme générale des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de la question 3.2.1 puis utiliser les conditions initiales.

3.4 Calculer le polynôme caractéristique de M et utiliser les résultats de la question 3.1.

3.6 Utiliser le résultat de la question 3.5 et le développement en série entière de la fonction exponentielle.

3.7 Utiliser le résultat de la question 3.4.

Exercice 4

4.3.2 Calculer $(\mathrm{L}_k \mid \mathrm{L}_i)$ pour tout $(k,i) \in [\![0\,;n]\!]^2$.

4.3.3 Utiliser le résultat de la question 4.3.2 pour montrer que $\mathscr{B}$ est libre.

4.3.4 Utiliser la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormale.

4.3.5 Appliquer le résultat de la question 4.3.4 à $\sum\limits_{j=0}^{n} \mathrm{L}_j$ et à 1.

4.4.1 Utiliser le résultat de la question 4.2 pour exprimer H comme l'orthogonal d'un espace vectoriel simple.

4.5.1 Utiliser la formule du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel.

4.5.2 Lier la distance à calculer et le projeté obtenu à la question 4.5.1.

Exercice 1

1.1 Posons $u_n = (-1)^{n+1}/n$ et $v_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et appliquons le théorème spécial des séries alternées à $\sum u_n$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, on remarque que $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ avec $v_n \geqslant 0$.
- La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puisque pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

- Enfin, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

Les hypothèses du théorème spécial des séries alternées sont donc vérifiées et on peut affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge. Finalement, on conclut que

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge.}}$$

1.2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$ sur $[\,0\,;1\,[$. Comme suggéré dans l'énoncé, vérifions les hypothèses de l'un des deux théorèmes d'intégration terme à terme du cours.

- Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont par définition polynomiales, donc continues et intégrables sur l'intervalle $[\,0\,;1\,[$.
- Soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,0\,;1\,[$, alors

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} x^{2n}(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (x^2)^n = (1-x)\frac{1-(x^2)^{\mathrm{N}+1}}{1-x^2}$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique. Comme $x^2 \in [\,0\,;1\,[$,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(x) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}$$

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = 1/(1+x)$. La série $\sum f_n$ converge alors simplement vers la fonction continue f sur $[\,0\,;1\,[$.

- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,0\,;1\,[$, remarquons que $|f_n(x)| = f_n(x)$ et que

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1})\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

En particulier, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2\mathrm{N}+2 \\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant 2\mathrm{N}+2 \\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}+2} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

CCINP Maths PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (professeur en CPGE). Il a été relu par David Michel (professeur agrégé) et William Aufort (professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué de trois exercices indépendants abordant des thématiques variées en algèbre, analyse et probabilités.

- Le premier exercice porte principalement sur les probabilités conditionnelles. On y étudie l'expérience des urnes de Pólya, qui consiste à effectuer plusieurs tirages successifs dans une urne pouvant contenir deux types de boules. La composition de l'urne évolue en fonction des résultats obtenus au fil des tirages. On démontre notamment que malgré cette évolution, la probabilité de tirer une boule de chaque type reste la même.
- Le deuxième exercice est consacré à la résolution d'une équation fonctionnelle avec une condition aux limites. On exhibe d'abord une solution sous la forme d'une série de fonctions, puis on prouve son unicité. On étudie ensuite la régularité, les variations et le comportement asymptotique de cette solution, avant d'en donner une expression sous la forme d'une intégrale.
- Le dernier exercice porte sur la méthode de Héron qui permet la construction de suites récurrentes approchant des racines carrées. On traite d'abord le cas réel : on établit la convergence et on obtient une majoration de l'erreur. On généralise ensuite la méthode au calcul approché de la racine carrée d'une matrice symétrique à valeurs propres positives.

La longueur et la difficulté des exercices étant croissantes, il était judicieux de les traiter dans l'ordre pendant l'épreuve. Le dernier exercice nécessite une bonne aisance dans les calculs. De nombreux outils usuels sont mobilisés, notamment le principe de récurrence. Ce sujet permet à la fois de s'entraîner sur une partie précise du programme si on ne traite qu'un seul exercice, et de réviser de nombreux chapitres d'un coup si on le traite en entier.

Indications

2 Appliquer la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2.

5 Considérer le système complet d'événements $\{[S_n = k],\ k \in [\![\, b\,;b+n\,]\!]\}$.

6 Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence forte. Faire appel à la définition de S_n donnée dans l'énoncé et au résultat des questions 1 et 5.

8 Raisonner par récurrence, en utilisant le résultat précédent.

9 Raisonner en supposant l'événement $[S_n = \ell]$ réalisé et déterminer quels sont les résultats du $(n+1)$-ième tirage qui réalisent l'événement $[S_{n+1} = k]$.

10 Appliquer la formule des probabilités totales, et utiliser le résultat précédent.

11 Suivre l'indication de l'énoncé et procéder par récurrence. Pour l'étape d'hérédité, faire appel aux résultats des questions 8 et 10.

12 Utiliser une comparaison avec une série de Riemann, en prenant soin de comparer des séries à termes positifs.

13 Écrire $\varphi(x)+\varphi(x+1)$ à l'aide des sommes partielles de deux séries, puis procéder à un changement d'indice.

15 Revenir à la définition de la limite, et utiliser le résultat précédent.

16 Démontrer ce résultat par récurrence.

17 Faire tendre n vers l'infini dans le résultat précédent.

18 Montrer que la série de fonctions converge normalement ou utiliser le résultat de la question 14.

19 Pour obtenir un équivalent de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0^+, calculer la limite de $x^2\varphi(x)$ en utilisant l'indication de l'énoncé et la continuité précédemment démontrée.

20 Appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions sur tout intervalle de la forme $[\,\varepsilon\,;+\infty\,[$ avec $\varepsilon > 0$.

21 Utiliser le théorème spécial des séries alternées.

23 Intégrer par parties sur un intervalle de la forme $[\,a\,;1\,]$ avec $a \in \,]\,0\,;1\,[$.

24 Appliquer le théorème d'interversion série-intégrale, à l'aide du résultat précédent.

25 Montrer que $f_k(x)^2 - x \geqslant 0$ en reconnaissant une identité remarquable.

26 Calculer la différence de deux termes successifs.

27 Établir la convergence à l'aide du théorème de la limite monotone. Déterminer alors la valeur de la limite en remarquant qu'elle est commune aux suites $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(f_{k+1}(x))_{k\in\mathbb{N}}$.

29 Raisonner par récurrence, en utilisant le résultat précédent et la question 25.

30 On rappelle que pour tous $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(BC) = \det(B)\det(C)$.

31 Traduire la relation $A = B^2$ en équations sur les coefficients de B. On pourra distinguer les cas $c = 0$ et $c \neq 0$.

34 Il pourra être utile d'expliciter la matrice $P^{-1}MP$.

36 Prouver que, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ N(PBP^{-1}) = N(B)$ en utilisant les propriétés de la trace.

37 Utiliser dans l'ordre : les questions 35 et 36, puis la question 29, et enfin l'inégalité suivante (que l'on prendra soin de justifier) :

$$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|$$

I. Les urnes de Pólya

1 Avant le premier tirage, l'urne contient b boules blanches et r boules rouges. La probabilité de tirer une boule blanche est donc égale à $b/(b+r)$. La variable aléatoire X_1 vérifie par conséquent $\mathrm{X}_1(\Omega) = \{0,1\}$ avec

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = \frac{b}{b+r} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0) = \frac{r}{b+r}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathrm{X}_1 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{b}{b+r}.}$$

2 Si $\mathrm{X}_1 = 1$, alors la première boule tirée est une boule blanche. Avant le deuxième tirage, l'urne contient donc $b+1$ boules blanches et r boules rouges. On en déduit

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1 \,|\, \mathrm{X}_1 = 1) = \frac{b+1}{b+r+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0 \,|\, \mathrm{X}_1 = 1) = \frac{r}{b+r+1}$$

Ainsi, $\boxed{\begin{array}{l}\text{La loi conditionnelle de } \mathrm{X}_2 \text{ sachant } [\mathrm{X}_1 = 1] \\ \text{est la loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{b+1}{b+r+1}.\end{array}}$

De même, si $\mathrm{X}_1 = 0$, alors l'urne contient b boules blanches et $r+1$ boules rouges avant le deuxième tirage, et par conséquent

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1 \,|\, \mathrm{X}_1 = 0) = \frac{b}{b+r+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0 \,|\, \mathrm{X}_1 = 0) = \frac{r+1}{b+r+1}$$

D'après la question précédente, $\{[\mathrm{X}_1 = 1], [\mathrm{X}_1 = 0]\}$ forme un système complet d'événements qui sont de probabilité non nulle. Il s'ensuit, en appliquant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1 \,|\, \mathrm{X}_1 = 1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1 \,|\, \mathrm{X}_1 = 0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0) \\ &= \frac{b+1}{b+r+1}\,\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1}\,\frac{r}{b+r} \\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) &= \frac{b(b+r+1)}{(b+r+1)(b+r)} = \frac{b}{b+r}\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{X}_2(\Omega) = \{0,1\}$, en passant au complémentaire, on en déduit

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) = 1 - \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathrm{X}_2 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{b}{b+r}.}$$

3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k représente le nombre de boules blanches ajoutées lors du k-ième tirage (qui peut être égal à 0 ou 1). Par conséquent, comme le nombre initial de boules blanches dans l'urne est égal à b,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La variable aléatoire } \mathrm{S}_n \text{ représente le nombre de} \\ \text{boules blanches dans l'urne après le } n\text{-ième tirage.}\end{array}}$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{X}_k(\Omega) = \{0,1\}$,

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs prises par } \mathrm{S}_n \text{ est } \mathrm{S}_n(\Omega) = [\![\, b\,; b+n \,]\!].}$$

4 Si l'événement $[\mathrm{S}_n = k]$ est réalisé, l'urne contient k boules blanches sur un total de $b+r+n$ boules avant le $(n+1)$-ième tirage. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 \,|\, \mathrm{S}_n = k) = \frac{k}{b+r+n}}$$

5 Remarquons que d'après la question 3, l'ensemble $\{[\mathrm{S}_n = k],\ k \in [\![\, b\,;b+n \,]\!]\}$ forme un système complet d'événements, qui sont tous de probabilité non nulle. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales et le résultat de la question 4,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{b+n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 \,|\, \mathrm{S}_n = k)\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k) = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{b+n} k\ \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k)$$

Or la dernière somme est égale à l'espérance de S_n, d'où

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)}{b+r+n}}$$

6 Suivons l'indication de l'énoncé et montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$\mathscr{P}(n)$: La variable aléatoire X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$

est vraie.

> On pourrait être tenté à cette question de raisonner par récurrence simple en reproduisant la démarche mise en œuvre à la question 2. Cependant, la présence dans l'énoncé des questions intermédiaires 3, 4 et 5 doit nous en dissuader. En effet, appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[\mathrm{X}_n = 1],\ [\mathrm{X}_n = 0]\}$ nécessiterait de calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 \,|\, \mathrm{X}_n = 1)$, ce qui s'avère difficile pour $n \geqslant 2$ sans connaître aussi les valeurs de $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1}$.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie : en effet, nous l'avons montré à la question 1.
- $\underline{[\mathscr{P}(1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n)] \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie pour tout $k \in [\![\, 1\,;n \,]\!]$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. D'après la question précédente,

  $$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)}{b+r+n}$$

  Or par définition de S_n et linéarité de l'espérance,

  $$\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = b + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k)$$

  Mais par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![\, 1\,;n \,]\!]$, la variable aléatoire X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $b/(b+r)$, d'où $\mathrm{E}(\mathrm{X}_k) = b/(b+r)$. Il s'ensuit

  $$\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = b + \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{b+r} = b + n\ \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}$$

  puis $$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1) = \frac{1}{b+r+n}\ \frac{b(b+r+n)}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

  Comme la variable aléatoire X_{n+1} est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on conclut qu'elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $b/(b+r)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée.
- <u>Conclusion</u> : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Centrale Maths 1 PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) ; il a été relu par Quentin Guilmant (ENS Lyon) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème, qui combine probabilités, séries entières et algèbre bilinéaire, est consacré aux nombres de Catalan. Il est constitué de trois parties dont les deux premières sont indépendantes.

- Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire, et plus précisément l'instant de premier retour à l'origine. C'est l'occasion d'introduire la suite des nombres de Catalan, d'étudier leur série génératrice et d'établir quelques propriétés utiles.
- Dans la très brève partie II, on effectue le calcul d'un déterminant à l'aide d'une famille orthogonale de polynômes.
- La dernière partie utilise les résultats des deux autres pour calculer deux déterminants, appelés déterminants de Hankel, définis à l'aide des nombres de Catalan.

C'est un sujet original, intéressant et bien articulé ; il ne comporte pas de difficulté particulière hormis la dernière question de la partie I. De surcroît, les questions sont bien détaillées et les résultats essentiels apparaissent explicitement dans l'énoncé, ce qui permet de le traiter dans le temps imparti, même en prenant le temps de s'approprier soigneusement toutes les notations introduites. Et comme il survole des parties du programme assez différentes, il constitue un excellent entraînement avant les écrits.

Indications

Partie I

1 Tout le monde aura reconnu un schéma de Bernoulli !

4 Observer que $s_\gamma(k) > 0$ pour tout $k \in [\![\, 2r+1\,;2n+1\,]\!]$.

5 S'inspirer des résultats et notations de la question I.A.

6 Pour $\omega \in \Omega$, se placer dans le cas où $\mathrm{T}(\omega) = 2n+2$ et poser $\gamma_k = \mathrm{X}_k(\omega)$ pour tout $k \in [\![\, 1\,;2n+1\,]\!]$ afin d'utiliser les résultats des questions précédentes. Attention cependant, γ n'est un chemin de Dyck qu'à un facteur -1 près.

7 Distinguer les cas $r = 0$, $0 < r < n$ et $r = n$.

8 Calculer $\mathrm{T}(\Omega)$ dans le cas où $p = 1/2$.

10 Utiliser les résultats de la question 6.

11 Vérifier que $\mathrm{G_T}$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1.

12 Partir de la définition de f et utiliser la relation fournie à la question 7.

14 Se servir des résultats des questions 13 et 9 pour montrer que ε est continue.

15 Déterminer $\mathrm{G_T}(1)$ à l'aide des résultats des questions 10 et 14.

16 Il suffit de vérifier que $\mathrm{G_T}$ n'est pas dérivable (à gauche) en 1, en utilisant les résultats des questions précédentes.

18 Calculer les coefficients de la série entière g à l'aide des résultats des questions 14 et 17.

20 Remarquer d'abord que T admet une espérance si, et seulement si, f est dérivable (à gauche) en $p(1-p)$. Vérifier ensuite que f a pour rayon de convergence $1/4$. Dans le cas $p = 1/2$, utiliser la croissance de f' sur $]\,0\,;1/4\,[$ pour montrer que si f' est dérivable en $1/4$, sa série entière converge en $1/4$, ce qui est en contradiction avec l'équivalent de C_n établi à la question 19.

Partie II

22 Observer que $\mathrm{P} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{V}_0, \ldots, \mathrm{V}_{n-1})$.

23 Montrer que $(\mathrm{W}_n - \mathrm{V}_n \mid \mathrm{W}_n - \mathrm{V}_n) = 0$ à l'aide des résultats de la question précédente.

Partie III

27 Faire apparaître le produit d'une fonction continue, donc bornée, sur $[\,0\,;1\,]$ et d'une fonction intégrable sur $]\,0\,;1\,]$.

30 Penser à la relation $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$.

31 Noter cette fois que $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$.

32 Utiliser les résultats des questions 30 et 31.

34 Se servir des résultats des questions 33 et 18.

35 Commencer par observer que $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = (\mathrm{PQ} \mid 1)$ afin de faire le lien avec G_n.

36 Développer $\mathrm{D}_n(\mathrm{X})$ selon la dernière ligne avec des cofacteurs de $(\mathrm{C}_{i+j-2})_{i,j}$.

37 Vérifier que $(\mathrm{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal, puis calculer $\mathrm{D}_n(0)$.

I. Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

1 À chaque instant $k \in [\![1\,;n]\!]$, le déplacement de la particule est une épreuve de Bernoulli de paramètre p, dont le succès correspond à un saut de $+1$ et l'échec à un saut de -1. Les sauts sont en outre indépendants. À l'issue de ces déplacements, on a répété n fois et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On obtient alors un schéma de Bernoulli, dont le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi, comme on l'a vu en cours,

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathrm{Y}_n \text{ suit la loi } \mathscr{B}(n\,;p).}$$

de sorte que
$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = np \ \text{ et } \ \mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) = np(1-p).}$$

2 Par définition, Y_n est le nombre de valeurs de $k \in [\![1\,;n]\!]$ telles que $\mathrm{X}_k = 1$. Le nombre de valeurs de $k \in [\![1\,;n]\!]$ telles que $\mathrm{X}_k = -1$ est ainsi égal à $n - \mathrm{Y}_n$ et

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k = \mathrm{Y}_n \times 1 + (n - \mathrm{Y}_n) \times (-1) = \mathrm{Y}_n + \mathrm{Y}_n - n$$

soit
$$\boxed{\mathrm{S}_n = 2\mathrm{Y}_n - n}$$

Par linéarité de l'espérance, on a $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) - n$, d'où

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = 2np - n = n(2p-1)}$$

De même, $\mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = 4\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n)$ donc

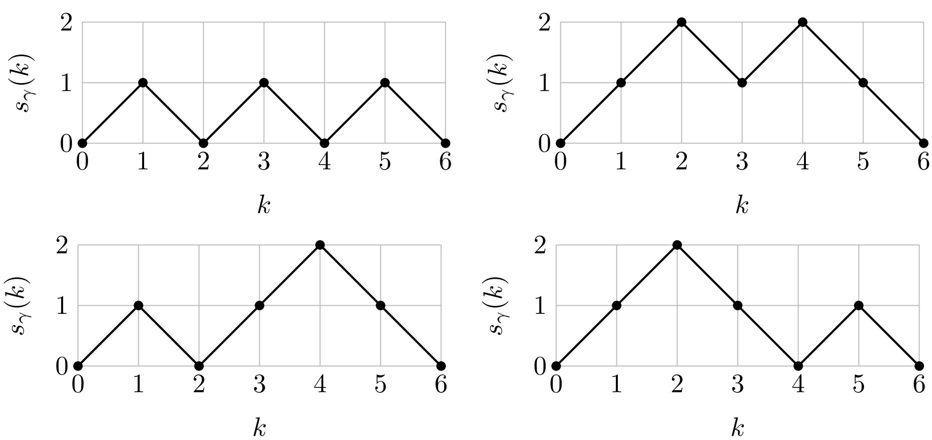
$$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = 4np(1-p)}$$

Enfin, $\mathrm{S}_n - n = 2(\mathrm{Y}_n - n)$ est un nombre pair, ce qui prouve que

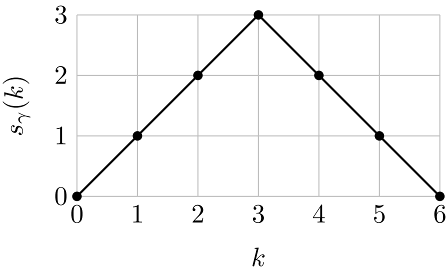
$$\boxed{\text{Les entiers } \mathrm{S}_n \text{ et } n \text{ ont la même parité.}}$$

> Dans les questions qui suivent, les nombres γ_k et $s_\gamma(k)$ correspondent aux valeurs prises respectivement par les variables aléatoires X_k et S_k (pour $k \in \mathbb{N}^*$). En particulier, $s_\gamma(k)$ a la même parité que k.

3 Voici tous les chemins de Dyck de longueur 6.



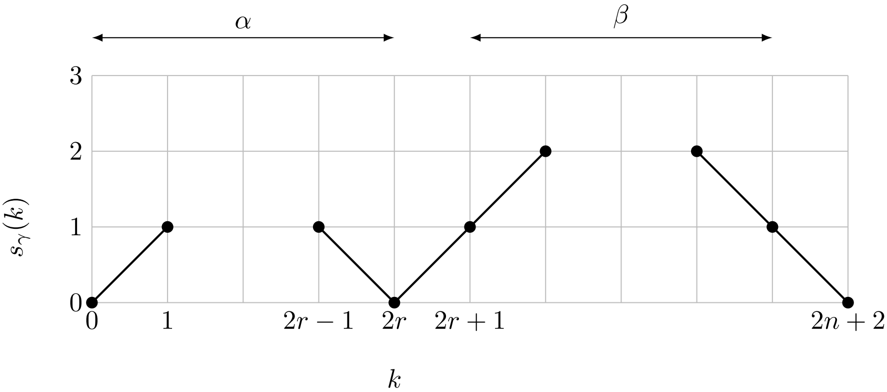
et enfin



Il y en a exactement 5, donc $\boxed{\mathrm{C}_3 = 5}$

4 Comme $s_\gamma(0) = 0$, l'entier $r = \max\left\{i \in [\![\, 0\,; n\,]\!] \mid s_\gamma(2i) = 0\right\}$ existe toujours.

Par définition de l'entier r, on a $s_\gamma(2r) = 0$. Comme γ est un chemin de Dyck de longueur $2n+2$, la situation peut se représenter de la manière suivante :



On peut déjà noter que nécessairement

$$\boxed{\gamma_1 = \gamma_{2r+1} = 1 \text{ et } \gamma_{2r} = \gamma_{2n+2} = -1}$$

De plus, $s_\gamma(k) \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![\, 0\,; 2r\,]\!]$ donc

$$\boxed{\text{Le chemin } \alpha = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}) \text{ est un chemin de Dyck de longueur } 2r.}$$

Enfin, $s_\gamma(k)$ étant de même parité que k d'après le résultat de la question 2, cette somme ne peut s'annuler que pour un entier k pair. Par définition de r, on a alors $s_\gamma(k) \geqslant 1$ pour tout $k \in [\![\, 2r+1\,; 2n+1\,]\!]$. Comme

$$s_\gamma(2r+1) = s_\gamma(2n+1) = 1$$

d'après la figure, on peut en déduire que

$$\boxed{\text{Le chemin } \beta = (\gamma_{2r+2}, \ldots, \gamma_{2n+1}) \text{ est un chemin de Dyck de longueur } 2(n-r).}$$

Les résultats de cette question sont encore valables pour $r = 0$ ou $r = n$, en considérant que l'un des chemins est de longueur nulle.

5 Les variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) étant mutuellement indépendantes,

$$\forall\, t \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_{t,\gamma}\right) = \prod_{k=1}^{2n} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{t+k} = \gamma_k\right)$$

Centrale Maths 2 PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Duboc (ENS Lyon) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et William Aufort (professeur en CPGE).

Ce sujet étudie l'approximation d'intégrales de la forme $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x)w(x)\,\mathrm{d}x$, où I est un intervalle, f une fonction continue sur I et w une fonction de poids sur I, par des formules de quadrature, qui sont des expressions de la forme

$$\mathrm{I}_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.

- La partie I introduit des résultats généraux sur les formules de quadrature. On y étudie notamment une méthode permettant de choisir des points x_i et des coefficients λ_i adaptés à l'approximation d'intégrales, à l'aide des bases de Lagrange, ainsi qu'une formule analytique pour exprimer l'erreur d'approximation obtenue avec les noyaux de Peano. La partie se termine par une application pratique où les formules établies précédemment servent à donner une majoration explicite de l'erreur d'approximation obtenue dans le cadre de la méthode des trapèzes.
- La partie suivante commence par des résultats techniques sur des familles de polynômes orthogonaux. Puis on démontre qu'utiliser de telles familles dans le choix des points x_i permet de maximiser l'ordre de la formule de quadrature, c'est-à-dire le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la valeur approchée de l'intégrale est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à m. Finalement, on calcule les familles obtenues à partir de deux fonctions de poids différentes, en remarquant en particulier que pour $w : x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ on retrouve les classiques polynômes de Tchebychev.
- La partie III nécessite de bonnes notions sur les séries entières. On utilise ces dernières pour définir les polynômes de Bernoulli B_m qui seront utilisés à la fin du sujet pour calculer un développement asymptotique explicite et à tout ordre de l'erreur associée à la méthode des trapèzes.

Ce sujet est assez calculatoire, et comporte un certain nombre d'applications numériques qu'il est important de savoir réaliser afin que les résultats qui les exploitent ne soient pas faussés.

Indications

3 Considérer la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

6 Montrer que la famille est libre.

7 Exprimer le fait que $\mathrm{I}_n(f)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ par rapport à la base $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$.

9 Se rappeler que e est une forme linéaire, et que $\mathrm{I}_n(f)$ est supposée d'ordre m, donc exacte sur $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$.

10 Calculer l'erreur à l'aide de la question 9.

11 Utiliser le résultat de la question 10 pour $m = 1$.

13 Commencer par calculer l'erreur obtenue sur chacun des intervalles de la subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$. Puis, penser à un changement de variable affine pour se ramener sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ et utiliser les résultats des questions précédentes.

14 Réutiliser le résultat de la question 11, en faisant attention à calculer correctement ${g_i}''$ à l'aide de la règle de la chaîne.

15 Utiliser une identité remarquable.

16 Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur I dans $\mathbb{R}$.

18 Commencer par montrer que $k = \deg(q) \leqslant \deg(p_n)$. Pour obtenir l'égalité, raisonner par l'absurde en supposant $\deg(q) < \deg(p_n)$ et en utilisant le fait que la famille $(p_0, \ldots, p_k)$ forme une base de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$.

19 Étudier le produit de $\prod\limits_{i=0}^{n}(\mathrm{X} - x_i)$ avec les L_i. En déduire un polynôme Q positif de degré $2n + 2$ tel que $e(\mathrm{Q}) \neq 0$.

20 Montrer que $\prod\limits_{i=0}^{n}(\mathrm{X} - x_i)$ est le $(n+1)$-ième polynôme orthogonal unitaire. Puis considérer la base $(p_0, \ldots, p_{n+1}, \mathrm{X}\, p_{n+1}, \ldots, \mathrm{X}^n\, p_{n+1})$.

22 Appliquer le résultat de la question 20.

23 Remarquer que $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$.

24 Utiliser les formules de trigonométrie des cosinus.

26 Poser le changement de variable $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$.

29 Effectuer un produit de Cauchy. Prouver la dernière inégalité par récurrence forte.

34 Si $f : z \mapsto \dfrac{z}{\mathrm{e}^{\,z} - 1}$, exprimer $f(-z)$ en fonction de $f(z)$ pour tout z dans le disque de convergence, et identifier les coefficients des séries entières obtenues.

37 Découper l'intervalle $[\,0\,;n\,]$ en intervalles $[\,k\,;k+1\,]$ pour $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$ et effectuer sur chacun d'eux une intégration par parties à l'aide de la question 36.

38 En reprenant le découpage en intervalles $[\,k\,;k+1\,]$, montrer la relation de récurrence suivante pour tout $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(m) :\quad -\int_k^{k+1} \mathrm{B}_1(x-k)g'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p=2}^{m} &\frac{(-1)^{p-1}b_p}{p\,!}\big(g^{(p-1)}(k+1) - g^{(p-1)}(k)\big)\\ &+ \frac{(-1)^m}{m\,!}\int_k^{k+1} \mathrm{B}_m(x-k)g^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et s'appuyer sur le résultat de la question 37 pour conclure.

39 Appliquer le résultat de la question 38 à une fonction g bien choisie, en pensant au fait que les b_{2p+1} sont nuls.

I. Généralités sur les formules de quadrature

1 Soit $c \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$e(x \mapsto c) = \int_0^1 c \,\mathrm{d}x - c = 0$$

donc $\mathrm{I}_0(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$. En outre, $\mathrm{X} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ et on a

$$e(x \mapsto x) = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x - 0 = 1/2 \neq 0$$

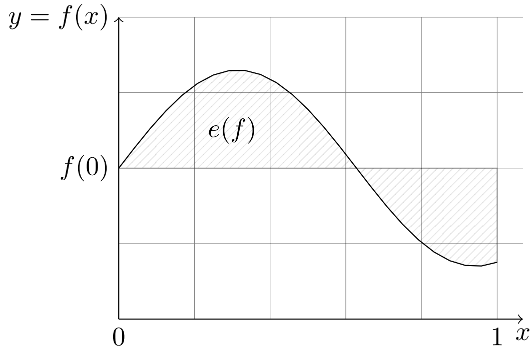
Par conséquent, $\mathrm{I}_0(f)$ n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La formule de quadrature } \mathrm{I}_0(f) \text{ est d'ordre } 0.}$$

L'erreur associée à la formule de quadrature $\mathrm{I}_0(f)$ peut également s'écrire :

$$e(f) = \int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t - f(0) = \int_0^1 (f(t) - f(0)) \,\mathrm{d}t$$

et correspond donc graphiquement à l'aire (algébrique) délimitée par la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = f(0)$.



2 La famille $(1, \mathrm{X})$ forme une base de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. Comme e est une forme linéaire, si elle s'annule sur une base de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$, alors $\mathrm{I}_0(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. Or, on constate que

$$e(x \mapsto 1) = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x - 1 = 0$$

$$e(x \mapsto x) = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} = 0$$

d'où $\mathrm{I}_0(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. De plus,

$$e(x \mapsto x^2) = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \neq 0$$

ainsi $\mathrm{I}_0(f)$ n'est pas exacte sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. En conclusion,

$$\boxed{\text{La formule de quadrature } \mathrm{I}_0(f) = f(1/2) \text{ est d'ordre } 1.}$$

La représentation graphique de l'erreur associée à $\mathrm{I}_0(f) = f(1/2)$ est similaire à celle obtenue pour $\mathrm{I}_0(f) = f(0)$ à la question 1. Il suffit de remplacer la droite horizontale d'équation $y = f(0)$ par celle d'équation $y = f(1/2)$.

3 Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3$. Puisque $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{I}_2(f)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est

$$\begin{cases} e(1)=0\\ e(\mathrm{X})=0\\ e(\mathrm{X}^2)=0\end{cases}$$

En calculant ces erreurs, on obtient le système

$$\begin{cases} 1=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{\lambda_1}{2}+\lambda_2\\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{\lambda_1}{4}+\lambda_2\end{cases}$$

Soustraire la troisième ligne à la deuxième donne

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_1}{4}\qquad\text{d'où}\qquad\lambda_1=\frac{2}{3}$$

Réinjecter la valeur de λ_1 dans la deuxième ligne permet d'obtenir

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\lambda_2\qquad\text{d'où}\qquad\lambda_2=\frac{1}{6}$$

Finalement, en réinjectant λ_1 et λ_2 dans la première ligne, on obtient $\lambda_0=1/6$. Par conséquent, l'unique solution de ce système est $(1/6,2/3,1/6)$. De plus, on remarque qu'avec ces valeurs de λ_0, λ_1 et λ_2,

$$e(\mathrm{X}^3)=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x-\left(\lambda_0\times 0^3+\lambda_1\left(\frac{1}{2}\right)^3+\lambda_2\times 1^3\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=0$$

mais

$$e(\mathrm{X}^4)=\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x-\left(\lambda_0\times 0^4+\lambda_1\left(\frac{1}{2}\right)^4+\lambda_2\times 1^4\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{24}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{120}\neq 0$$

La famille $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\mathrm{X}^3)$ formant une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{I}_2(f)$ est donc exacte sur $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ mais pas sur $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$. En d'autres termes,

La formule de quadrature $\mathrm{I}_2(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ si et seulement si $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=(1/6,2/3,1/6)$. Elle est alors d'ordre 3.

4 Montrons que φ est injective. Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ tel que $\varphi(\mathrm{P})=\varphi(\mathrm{Q})$. L'application φ étant linéaire, on a

$$\varphi(\mathrm{P}-\mathrm{Q})=\varphi(\mathrm{P})-\varphi(\mathrm{Q})=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$$

Le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ est de degré au plus n et admet x_k comme racine pour tout $k\in[\![\,0\,;n\,]\!]$, soit $n+1$ racines distinctes. Par conséquent $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ est le polynôme nul d'où $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$. Ainsi, l'application φ est linéaire et injective entre deux espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Finalement,

L'application linéaire φ est un isomorphisme.

Centrale Informatique MP-PC-PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet a pour objectif la réalisation d'une image en deux dimensions représentant une scène simple, composée de plusieurs sources lumineuses et de plusieurs objets, choisis sphériques pour simplifier le problème. Il permet d'aborder une technique très efficace de fabrication d'images virtuelles et demandant peu de ressources. Les structures manipulées sont des tableaux `numpy` et des fonctions sont données pour en faciliter l'usage.

- La partie I permet la construction des fonctions élémentaires de géométrie et des premiers objets optiques tels que rayons, sphères et intersections des deux.
- Dans la partie II, l'étude évolue vers la problématique de la visibilité d'une source lumineuse depuis un point d'une sphère et de la couleur obtenue compte tenu de la lumière de la source et de l'incidence du rayon lumineux.
- La partie III, indépendante du reste de l'énoncé, demande de traiter l'enregistrement des données relatives à une scène (positions et couleurs des objets et des sources) au sein d'une base de données. C'est l'occasion de poser quatre questions de langage SQL d'un niveau très progressif.
- L'étude entre dans le vif du sujet à la quatrième partie, avec la modélisation du « lancer de rayons », considération physiquement fausse mais compatible avec la réalité qui consiste à imaginer que les rayons lumineux partent de l'œil. On modélise ces rayons et leur première intersection avec les objets de la scène, puis on étudie la couleur vue et la projection de cette même scène sur un écran en deux dimensions.
- La partie V, plus difficile que les précédentes, demande de ne pas se perdre dans les notations et le concept de rayon lumineux se réfléchissant d'une surface à l'autre. Les deux dernières questions portent sur une optimisation qui reste quelque peu théorique par rapport au reste du sujet.

Ce sujet donne une bonne idée de ce que l'on peut faire avec des outils informatiques, sur le thème assez pratique de la réalisation d'images de synthèse. Il est globalement bien mené et progressif, tous les concepts sont parfaitement définis. Il ne contient que de la manipulation assez simple de tableaux `numpy`, accessible dès la première année. Il a le grand intérêt de faire produire quasiment l'ensemble du code nécessaire à la mise en œuvre : le lecteur intéressé pourra rapidement s'amuser à créer lui-même des images. La fin du sujet réserve des questions plus délicates pour les candidats plus à l'aise.

Indications

Partie I

1 Bien lire les paragraphes précédant la question, notamment à propos de la représentation des points et des vecteurs.

2 Lire attentivement l'annexe et les fonctions du module `numpy` autorisées.

5 Le mot-clé `assert` permet la vérification de la condition donnée et arrête l'exécution si elle n'est pas vérifiée.

8 Il faut résoudre l'équation précédente. On peut remarquer que les deux solutions possibles doivent obligatoirement être positives.

Partie II

10 Faire un dessin en deux dimensions et regarder les vecteurs présents.

11 Il faut chercher les intersections du rayon partant de la source lumineuse et passant par P. Ne pas oublier que les sphères plus éloignées de la source que P n'interviennent pas.

12 Le code à produire est très court, il suffit de traduire la relation (2) de l'énoncé. Le cosinus de θ peut être obtenu d'après le schéma par un produit scalaire.

13 Faire un schéma en deux dimensions et décomposer $\overrightarrow{u}$ sur l'axe de $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ et l'axe orthogonal.

Partie III

14 Pour récupérer l'année, utiliser une fonction donnée en annexe.

16 Regarder où se trouvent les données permettant la sélection et celles nécessaires à la projection, puis déterminer comment joindre les tables concernées.

17 La fonction `OCCULTE` demande deux identifiants d'objets indépendants, il faut donc joindre deux fois la table `Objet` en les renommant.

Partie IV

18 Déterminer le lien entre x et j, puis entre y et i. Pour cela, faire un schéma représentant les cases et le centre de la figure, pour une valeur de N faible. Attention, sur la figure de l'énoncé i et j ne sont pas en face de $\mathrm{E}(i,j)$.

20 Pour retourner le point d'intersection le plus proche et l'indice de l'objet correspondant, il est nécessaire de récupérer toutes les intersections avec la distance à l'œil, le point de contact et l'indice de l'objet afin de conserver les bonnes valeurs.

21 Le calcul de couleur diffusée depuis une source par un point de sphère a déjà été fait à la question 12. Il suffit d'ajouter les couleurs correspondant aux différentes sources, sans oublier de vérifier si elles sont bien visibles.

Partie V

25 Une boucle `while` ou `for` est possible. À chaque itération, si l'interception du rayon existe, on la stocke et on continue.

26 La relation donnée dans l'énoncé implique que l'on doit parcourir le tableau des réflexions en partant de la fin.

27 Reprendre la fonction `lancer` et regarder ce que `couleur_perçue` y modifie.

29 Créer l'ensemble des triplets {`objr_id`, `so_id`, `objo_id`}. Utiliser l'opérateur `in` pour vérifier leur présence dans la liste `risque`.

30 Reprendre la fonction `visible` et l'adapter. Attention à l'ordre des arguments.

I. Géométrie

1 La fonction `vec` calcule les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en soustrayant les coordonnées du point A à celles du point B.

```
def vec(A, B):
    return B - A
```

> L'énoncé dit explicitement que retrancher deux vecteurs est réalisé par l'opération `v1 - v2` et que les vecteurs, comme les points, sont représentés par des tableaux. Il fallait donc éviter d'écrire une boucle ici.

2 La fonction `ps` calcule le produit scalaire de deux vecteurs, somme des produits terme à terme de leurs composantes, ce que fait précisément la fonction `np.inner`.

```
def ps(v1, v2):
    return np.inner(v1, v2)
```

> La méthode `inner` du module `numpy` est donnée dans l'annexe et sa description correspond exactement au produit scalaire. Il est néanmoins possible de réaliser cette opération autrement, notamment en faisant la somme des composantes du produit de Hadamard des deux vecteurs :
>
> ```
> def ps(v1, v2):
>     return np.sum(v1 * v2)
> ```
>
> La réalisation de ce calcul par une boucle, demandant beaucoup plus d'écriture, a certainement été acceptée par les correcteurs, mais ce n'est visiblement pas la réponse attendue. On peut écrire par exemple
>
> ```
> def ps(v1, v2):
>     somme = 0
>     for i in range(len(v1)):
>         somme += v1[i] * v2[i]
>     return somme
> ```

3 La fonction `norme` calcule la racine carrée du produit scalaire du vecteur par lui-même.

```
def norme(v):
    return math.sqrt(ps(v, v))
```

4 La fonction `unitaire` retourne le vecteur unitaire correspondant à l'argument, en utilisant le produit d'un scalaire et d'un vecteur.

```
def unitaire(v):
    return (1/norme(v)) * v
```

5

> Le mot-clé `assert` n'est pas au programme et sa présence dans un code d'une des premières questions du sujet a pu décontenancer un certain nombre d'étudiants. Cette instruction correspond à la vérification de la condition donnée, à savoir est-ce que `t` est positif ou non. Si c'est le cas, l'instruction ne fait rien. Si non, elle *lève* une erreur, et l'utilisateur obtient alors le message `AssertionError` avant un arrêt immédiat de l'exécution.

La fonction `pt` permet de calculer, pour un rayon lumineux `r` $= (\mathrm{S}, \overrightarrow{u})$ et un entier `t` donnés, la position du point M du rayon tel que $\overrightarrow{\mathrm{SM}} = t\,\overrightarrow{u}$. Elle ne fonctionne, comme indiqué dans la description donnée dans l'énoncé, que pour $t \geqslant 0$, car t est la distance séparant M de la source, dans la direction définie par $\overrightarrow{u}$.

La fonction `dir` définit le vecteur unitaire associé au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donc au rayon passant par les points `A` et `B` et allant de `A` vers `B`.

La fonction `ra` définit le rayon lumineux partant du point `A` et passant par `B`.

$\boxed{6}$ La fonction `sp` crée la représentation de la sphère de centre `A` et passant par `B`.

```
def sp(A, B):
    return A, norme(vec(A, B))
```

$\boxed{7}$ On considère un point M appartenant à la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Cela signifie qu'il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\,\overrightarrow{u}$$

Ce point M appartient à la sphère de centre C et de rayon r si et seulement si la distance MC vaut r, soit $\|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|^2 = \overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} = r^2$. Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\
\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MC}} &= \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|^2 + t^2 + 2\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \left(t\,\overrightarrow{u}\right)
\end{aligned}$$

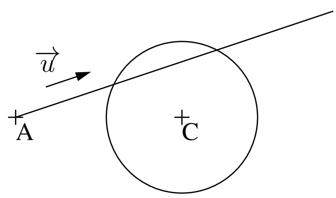
On trouve ainsi que $\boxed{t^2 + 2\,t\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|^2 - r^2 = 0}$

Cette équation est un trinôme du second degré. Si son discriminant est strictement positif, elle a deux solutions réelles correspondant aux deux intersections de la droite et de la sphère. Un discriminant nul indique une unique solution réelle double, correspondant à une droite tangente à la sphère. Enfin, dans le cas d'un discriminant strictement négatif, les solutions ne sont pas réelles, la droite et la sphère ne sont alors pas sécantes.

$\boxed{8}$ L'équation déterminée ci-dessus a des solutions réelles si

$$\Delta = 4\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)^2 - 4\left(\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|^2 - r^2\right) \geqslant 0$$

De plus, avec A à l'extérieur de la sphère, le schéma ci-contre montre que les deux solutions doivent être positives. Il faut donc que leur produit et leur somme soient positifs. Dans un trinôme de la forme $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, le produit des racines vaut c/a et la somme $-b/a$. La condition sur le produit est déjà réalisée si A est à l'extérieur de la sphère. Celle sur la somme rend nécessaire la condition



$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} < 0$$

Si c'est le cas, il faut alors retourner la plus petite solution des deux, soit

$$t = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Mines Maths 1 PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Michel (professeur agrégé) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) et William Aufort (professeur en CPGE).

Ce sujet traite d'une classe de variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion, plus précisément celles qui satisfont la condition suivante pour un $\alpha > 0$:

$$(\mathcal{D}_\alpha) \qquad \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big) = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ce type de condition n'est pas fréquent en prépa : elle n'est satisfaite par aucune loi usuelle au programme ! Pour des variables aléatoires entières, la quantité $\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big)$ reste familière puisqu'elle est utilisée pour exprimer l'espérance de $|\mathrm{X}|$. On la retrouve également dans les inégalités de Markov et de Bienaymé–Tchebychev.

- La première partie comporte deux questions de cours qui seront utilisées plus tard.
- Dans la deuxième partie, on démontre des résultats généraux sur les variables aléatoires satisfaisant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ ainsi que sur les variables aléatoires symétriques.
- La troisième partie est indépendante de la précédente. Sans que l'énoncé ne le mentionne, elle est consacrée à l'étude de la série entière z^n/n sur le cercle unité. Après avoir démontré la convergence de cette série sur le disque unité privé de 1, l'étude d'une intégrale à paramètre permet d'obtenir l'expression de la somme de la série entière z^n/n pour $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\theta \in \left]\,0\,;2\pi\,\right[$. Cette partie constitue une bonne révision du cours sur les intégrales à paramètre.
- Dans la partie suivante, on définit la fonction caractéristique Φ_X d'une variable aléatoire symétrique X. On en démontre des propriétés élémentaires puis, lorsque la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ est vérifiée, on prouve que Φ_X n'est pas dérivable en 0. Pour cela, on utilise les résultats des parties précédentes ainsi qu'une méthode standard dans l'étude de séries semi-convergentes : la transformation d'Abel.
- Dans la cinquième partie, on applique un schéma classique d'étude de la suite des fonctions caractéristiques des moyennes empiriques d'une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi en démontrant une propriété de morphisme puis la convergence simple.

Pour réussir ce sujet, il fallait maîtriser les séries de fonctions et les intégrales à paramètre, ainsi que les définitions et propriétés essentielles de l'espérance en probabilités. On utilise à plusieurs reprises les théorèmes de continuité de la somme d'une série de fonctions, de convergence dominée et de dérivation des intégrales à paramètre, ce qui en fait un bon sujet de révision des chapitres d'analyse de deuxième année et de probabilités.

Indications

3 Comme $|\mathrm{X}|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big)$ est convergente.

4 Appliquer le théorème 1 admis par l'énoncé.

5 Montrer que les couples $(-\mathrm{X}, -\mathrm{Y})$ et (X, Y) suivent la même loi puis appliquer le théorème 1 avec une fonction $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ bien choisie.

6 Montrer que l'intégrande est continue sur $[\,0\,;1\,]$. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L est de classe $\mathscr{C}^n$ et

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{L}^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!\, z^n}{(1-tz)^n}$$

7 Utiliser l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

8 Appliquer le résultat de la question 7 pour obtenir la première limite puis montrer que la fonction $t \in [\,0\,;1\,] \mapsto |1 - tz|$ admet un minimum strictement positif.

9 Utiliser les questions 6 et 8 ainsi que la formule de Taylor avec reste intégral.

10 Justifier que, pour $a \in \,]\,0\,;\pi\,[$, la fonction continue γ atteint son minimum sur $[\,-a\,;a\,] \times [\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il est strictement positif à l'aide de la question 7.

11 Appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur tout segment de la forme $[\,-a\,;a\,]$ avec $a \in \,]\,0\,;\pi\,[$ grâce à la question 10. Montrer que

$$\forall t \in \,]\,-\pi\,;\pi\,[\qquad \mathrm{F}'(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}}{(1+u\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t})^2}\,\mathrm{d}u$$

12 Calculer F' en mettant l'intégrande sous la forme g'/g. Montrer, en intégrant l'expression de F' obtenue, que

$$\forall t \in \,]\,-\pi\,;\pi\,[\qquad \mathrm{F}(t) = \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}\,t}{2}$$

13 Justifier que l'on peut appliquer la question 9 avec $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,n\,\theta}}{n} = -\mathrm{F}(\theta - \pi)$$

16 Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1} = \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| = n\big)$. Déduire la première formule voulue du théorème de transfert. Obtenir la seconde formule en raisonnant sur les sommes partielles, en coupant la somme initiale en deux et en effectuant un changement d'indice dans l'une des sommes.

17 Obtenir la limite souhaitée en démontrant que la somme de gauche définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Conclure grâce aux résultats des questions 9 et 13.

18 Utiliser les résultats des questions 16 et 17 et la formule de trigonométrie

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Déduire du développement limité obtenu en 0^+ un développement limité en 0^-.

20 Raisonner par récurrence grâce à la question 19 en écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{M}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\mathrm{M}_n + \frac{1}{n+1}\mathrm{X}_{n+1}$$

21 Appliquer les résultats des questions 18, 20 puis 14.

22 Montrer que $\Phi_{\mathrm{M}_n}(2n\pi) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ grâce à la question 20.

I. Questions de cours

1 La définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète varie selon que l'image de X est un ensemble fini ou non. Distinguons deux cas.

- 1er cas : Si $X(\Omega)$ est finie, alors X est d'espérance finie.
- 2e cas : Si $X(\Omega)$ est infinie et dénombrable, alors en notant $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, on dit que X est d'espérance finie si la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument.

Démontrons à présent l'équivalence demandée en distinguant ces deux cas.

- 1er cas : $X(\Omega)$ est finie. Alors l'image de Ω par $|X|$ est également finie, car c'est l'image de l'ensemble fini $X(\Omega)$ par l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. D'après la définition qui précède, $|X|$ est d'espérance finie.
- 2e cas : Si $X(\Omega)$ est infinie et dénombrable, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si, avec les notations précédentes, $\sum |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. La probabilité $\mathbb{P}$ prenant des valeurs positives ou nulles, on a

  $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_n|\mathbb{P}(X = x_n) = \big|x_n\mathbb{P}(X = x_n)\big|$$

  Par conséquent, la convergence absolue de la série $\sum |x_n|\mathbb{P}(X = x_n)$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum x_n\mathbb{P}(X = x_n)$, c'est-à-dire au fait que X est d'espérance finie.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{X est d'espérance finie si et seulement si } |X| \text{ l'est aussi.}}$$

2 On suppose que X est bornée : soit $M \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}\big(|X| \leqslant M\big) = 1$. Lorsque $X(\Omega)$ est finie, X est d'espérance finie, indépendamment du fait qu'elle soit bornée. Supposons désormais que $X(\Omega)$ est infinie dénombrable. En notant $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, comme $\mathbb{P}$ est positive,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \big|x_n\mathbb{P}(X = x_n)\big| \leqslant M\,\mathbb{P}(X = x_n)$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- soit $|x_n| \leqslant M$;
- soit $|x_n| > M$ et dans ce cas $\{X = x_n\} \subset \big\{|X| > M\big\}$ d'où l'on déduit, par croissance de $\mathbb{P}$, que $0 \leqslant \mathbb{P}(X = x_n) \leqslant \mathbb{P}\big(|X| > M\big) = 1 - \mathbb{P}\big(|X| \leqslant M\big) = 0$, et finalement $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$.

Dans tous les cas, l'inégalité ci-dessus est vraie. Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ est convergente (par définition de la loi de X), on en déduit que la série $\sum x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si X est bornée, alors X est d'espérance finie.}}$$

II. Généralités sur les variables aléatoires

Nous allons étudier des variables aléatoires entières symétriques vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ pour un $\alpha > 0$. Il convient donc de se demander s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une variable aléatoire entière symétrique X tels que $(\mathcal{D}_\alpha)$ est vérifié.
Considérons une variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{Z}$ suivant la loi donnée par :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{3}{\pi^2 k^2}$$

Ainsi définie, X est une variable aléatoire entière symétrique sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{P})$.
Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Or, comme la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k \geqslant n \qquad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

soit
$$\forall k \geqslant n \qquad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On reconnaît dans les membres de gauche et de droite des termes généraux de séries télescopiques, donc on obtient en sommant

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - 1/n} = \frac{1}{n} \times \left(1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

d'où
$$\frac{6}{n\pi^2} \leqslant \mathbb{P}\big(|\mathrm{X}| \geqslant n\big) \leqslant \frac{6}{n\pi^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$ avec $\alpha = 6/\pi^2$.

La question suivante se pose alors : Soit $\alpha > 0$. Existe-t-il une variable aléatoire entière symétrique $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{Z}$ satisfaisant $(\mathcal{D}_\alpha)$? On peut vérifier que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\alpha}{n+1} & \text{si } n > \alpha \\[2ex] 1 - \dfrac{\alpha}{\lfloor\alpha\rfloor + 1} & \text{si } n = 0 \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive et vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En raisonnant comme précédemment, on démontre que la variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{Z}$ suivant la loi donnée par

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - \frac{\alpha}{\lfloor\alpha\rfloor + 1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{p_{|n|}}{2}$$

est alors une variable aléatoire entière symétrique vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$: l'énoncé n'est pas en train de parler de choses qui n'existeraient pas !

Mines Maths 2 PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Florian Metzger (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet est constitué de six parties relativement indépendantes. On s'intéresse aux polynômes à racines toutes réelles et à des opérations qui laissent stable cet ensemble.

- La première partie aborde les suites log-concaves, dont la définition est donnée dans l'énoncé.
- La partie II étudie les polynômes à racines toutes réelles, notamment leur stabilité par dérivation et par l'application linéaire $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}' - \alpha\mathrm{P}$.
- Dans la partie suivante, on donne des exemples de polynômes à racines toutes réelles : polynôme caractéristique de matrice, polynômes orthogonaux pour un produit scalaire, ou série génératrice d'une variable aléatoire finie.
- La quatrième partie caractérise les polynômes à racines toutes réelles par la positivité d'une forme quadratique, une application qui s'écrit comme somme de carrés de formes linéaires. C'est le théorème de Hermite-Sylvester.
- Dans la partie V, on étudie les suites multiplicatives de Pólya-Schur : ce sont celles qui conservent le caractère réel des racines d'un polynôme lorsqu'on multiplie ses coefficients par ceux de la suite terme à terme.
- La dernière partie établit le théorème de Pólya-Schur qui caractérise les suites multiplicatives du même nom.

Hormis la troisième partie et les trois dernières questions, ce sujet n'utilise que des outils de PCSI. Des questions proches du cours sont intercalées avec d'autres qui sont hautement techniques. On utilise de l'algèbre, de l'analyse et un soupçon de probabilités. Ce sujet peut être étudié dès la première année ou pour réviser. Enfin, on pourra laisser de côté la dernière question car elle est hors programme.

Indications

Log-concavité des suites

2 Appliquer la définition et utiliser le résultat de la question 1.

3 Montrer que si $a_{j+1} \leqslant a_j$ pour un indice j, c'est encore le cas pour les paires d'indices consécutifs suivants.

Polynômes réels à racines toutes réelles

4 Invoquer que si λ est une racine multiple de P, alors c'est aussi une racine de P$'$. Appliquer le théorème de Rolle entre deux racines de P.

5 Exprimer le degré de Q en fonction de la multiplicité de 0 comme racine de P lorsque $\mathrm{P}(0) = 0$. Remarquer que les racines de Q sont les inverses des racines non nulles de P.

6 Calculer explicitement Q et utiliser la positivité de son discriminant lorsque celui-ci est de degré 2.

7 Traiter séparément le cas $\alpha = 0$. Appliquer le même raisonnement qu'à la question 4 puis exprimer la somme des racines du polynôme en fonction des coefficients.

8 Factoriser Q et remarquer que $(\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{D}) = \mathrm{D} - \lambda\,\mathrm{id}$.

Quelques exemples

9 Utiliser le théorème spectral.

10 Diagonaliser A et prendre la racine carrée de ses valeurs propres.

11 Montrer que $\chi_{\mathrm{C^2B}}(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{CBC}}(\mathrm{X})$ d'abord pour C inversible, puis modifier légèrement les valeurs propres de C et passer à la limite.

12 Vérifier la convergence en comparant à une intégrale de Riemann. Utiliser qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle sur un intervalle est nulle.

13 Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt puis montrer la propriété sur le degré par récurrence.

14 Utiliser l'orthogonalité de L_n avec $\prod\limits_{i=1}^{r}(\mathrm{X}-\lambda_i)$ lorsque $r < n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines réelles de L_n.

15 Utiliser que la série génératrice d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes est le produit de leur séries génératrices.

16 Utiliser les calculs de la question 15 pour trouver les paramètres b_i des B_i.

Théorème de Hermite-Sylvester

17 Montrer que la famille $({e_1}^*, \ldots, {e_n}^*)$ définie par ${e_i}^*(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, Exprimer la matrice de la famille considérée dans cette base.

18 Dans le développement des carrés des formes linéaires, calculer explicitement les coefficients devant $x_i x_j$ et remarquer qu'ils ne dépendent que de $i + j$.

20 Supposer qu'une combinaison linéaire de ces formes $\mathbb{R}$-linéaires est nulle et montrer que celle-ci est aussi nulle sur $\mathbb{C}^n$, puis utiliser le résultat de la question 17.

21 Utiliser la définition de q et l'indication de l'énoncé.

Suite multiplicative de Pólya-Schur

22 Montrer que $\Gamma(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}'$.

23 Considérer le polynôme $\mathrm{X}^k\mathrm{P}$.

24 Décaler la suite à l'aide de la question 23 puis utiliser les polynômes $(1+\mathrm{X})^2$ et $\mathrm{X}^2 - 1$. Raisonner par l'absurde et considérer le plus petit indice $m \geqslant k$ tel que $\gamma_m \neq 0$.

25 Même indication que pour la question 24.

Théorème de Pólya-Schur

26 Utiliser le polynôme $(1+\mathrm{X})^n$.

27 Appliquer le théorème 1 à un polynôme P puis faire tendre n vers $+\infty$. Montrer qu'un $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ n'est pas racine de $\Gamma(\mathrm{P})$ en minorant la distance entre z_0 et les racines de $\mathrm{P} \circ \mathrm{P}_n$.

28 Utiliser le polynôme $(\mathrm{X}-1)^2$.

29 Montrer que la suite $(\gamma_{n+1}/\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis appliquer le critère de d'Alembert.

30 Majorer le terme général de la série et utiliser le résultat de la question 29.

31 Supposer la convergence d'une suite de polynômes vers la somme de la série entière uniforme sur un voisinage complexe de 0, ce qui implique la convergence uniforme de ses dérivées successives au voisinage de 0 d'après un théorème d'analyse complexe de niveau L3. Ensuite, utiliser le théorème 1 et le raisonnement de la question 27.

Log-concavité des suites

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, posons $a_k = \dbinom{n}{k}$ et remarquons que $a_k > 0$. Soit $k \in [\![1\,; n-1]\!]$. Calculons

$$\begin{aligned}
\frac{{a_k}^2}{a_{k-1}\,a_{k+1}} &= \binom{n}{k}^2 \binom{n}{k-1}^{-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \\
&= \frac{(n!)^2\,(k-1)!\,(n-k+1)!\,(k+1)!\,(n-k-1)!}{(k!)^2\,\left[(n-k)!\right]^2\,(n!)^2} \\
&= \underbrace{\frac{k+1}{k}}_{\geqslant 1}\,\underbrace{\frac{n-k+1}{n-k}}_{\geqslant 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{{a_k}^2}{a_{k-1}\,a_{k+1}} \geqslant 1$$

Comme $a_{k-1}\,a_{k+1} > 0$, on a ${a_k}^2 \geqslant a_{k-1}\,a_{k+1}$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1\,; n-1]\!]$,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la suite } \left(\binom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est log-concave.}}$$

2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1\,; n-1]\!]$. Comme $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est ultra log-concave,

$$\frac{{a_k}^2}{\dbinom{n}{k}^2} \geqslant \frac{a_{k-1}\,a_{k+1}}{\dbinom{n}{k-1}\dbinom{n}{k+1}}$$

soit
$${a_k}^2 \geqslant a_{k-1}\,a_{k+1} \binom{n}{k}^2 \binom{n}{k-1}^{-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \geqslant a_{k-1}\,a_{k+1}$$

car $\left(\dbinom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est log-concave d'après le résultat de la question 1.

$$\boxed{\text{Si } (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.}}$$

3 Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une suite strictement positive et log-concave. Posons

$$j = \max\,\{k \in [\![0\,; n]\!] \mid a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k\}$$

Si $k = n$, on pose $j = n$ et la suite est unimodulaire. Sinon, montrons par récurrence que le prédicat

$$\mathscr{P}(\ell): \quad a_{j+\ell} \geqslant a_{j+\ell+1}$$

est vraie pour tout $\ell \in [\![0\,; n-j-1]\!]$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car par définition de j, on a $a_j > a_{j+1}$.
- $\underline{\mathscr{P}(\ell) \Longrightarrow \mathscr{P}(\ell+1)}$: soit $\ell \in [\![0\,; n-j-1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(\ell)$ est vraie. Par log-concavité de la suite on a

  $$a_{j+\ell+1} \geqslant \frac{a_{j+\ell}\,a_{j+\ell+2}}{a_{j+\ell+1}} \geqslant a_{j+\ell+2}$$

  car $a_{j+\ell} \geqslant a_{j+\ell+1}$ par hypothèse de récurrence et $a_{j+\ell+1} > 0$. Donc $\mathscr{P}(\ell+1)$ est vraie.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet se compose de trois exercices indépendants dont le point commun est le mot « marche » :

- La partie I s'intéresse aux randonnées, prétexte à quelques questions de SQL puis à divers calculs avec les données recueillies par GPS lors d'une balade. La seconde sous-partie se compose de questions de programmation, assez progressives et faisant intervenir des classiques du programme de classes préparatoires, comme la recherche d'un maximum dans une liste.
- La brève partie suivante porte sur la marche brownienne d'une petite particule. La thématique abordée est celle du calcul numérique, principalement autour des schémas d'Euler, et propose une approche originale et élégante par vecteurs d'état.
- Le dernier exercice aborde la marche auto-évitante, c'est-à-dire la formation sur un quadrillage d'un chemin qui ne se recoupe jamais. Ceci permet par exemple de modéliser des chaînes de polymères. L'objectif du sujet était de tester la compréhension d'algorithmes, de les programmer et d'étudier leur complexité. La dernière question, plus ouverte, permettait d'évaluer plus finement les candidats.

Ce sujet original peut être abordé dès la fin de la première année car il ne comporte qu'une question portant sur le programme de seconde année (la question 18, sur la complexité d'un tri). Il fait appel à de nombreuses notions de programmation, nécessite de bien maîtriser les algorithmes de base comme la recherche d'un maximum ou le schéma d'Euler, et est très progressif. C'est un très bon sujet de révision, clair et bien posé, qui permettait de trier efficacement les candidats.

Indications

2 Utiliser `GROUP BY` si cette instruction est connue, sinon utiliser des unions de requêtes.

3 Utiliser par exemple une requête imbriquée.

4 Réaliser une autojointure, c'est-à-dire la jointure d'une table avec elle-même, en prenant soin de renommer les grandeurs dont on a besoin.

5 Attention au passage des éléments en flottants, car ce sont des chaînes de caractères lorsqu'ils sont extraits du fichier.

8 Ne pas lésiner sur le nombre d'étapes dans la décomposition, le sujet le demande explicitement ! Attention aussi car le rayon terrestre est une variable globale donnée en kilomètres.

9 On peut ici utiliser la fonction de la question 8, même si on n'a pas réussi à la programmer.

10 Un exemple d'utilisation et de syntaxe de `assert` est donné dans l'annexe de cette partie.

11 Il faut regarder chaque composante du vecteur : certaines sont déjà disponibles, d'autres peuvent être déduites de l'équation différentielle.

13 Quelles sont les coordonnées des points voisins d'un point fixé ?

14 Il faut trouver un chemin qui entoure le plus vite possible un point, afin que celui-ci devienne forcément un chemin non auto-évitant.

16 La complexité recherchée dépend de celle de la fonction `positions_possibles`. Il faut donc tout d'abord étudier celle-ci, en fonction de la taille du paramètre d'entrée `atteints`.

19 Supposons que le chemin soit trié, quelle propriété a-t-on alors pour la liste associée si le chemin n'est pas un CAE ?

20 Un petit dessin permet de définir les relations entre les coordonnées des points utilisés.

22 Appliquer directement l'algorithme décrit dans le sujet.

I. Randonnée

$\boxed{1}$ On peut proposer par exemple

```
SELECT COUNT(*)
FROM Participant
WHERE ne >= 1993 AND ne <= 2003;
```

> Il aurait été acceptable de proposer, sous réserve de connaître le mot-clef `BETWEEN`,
>
> ```
> SELECT COUNT(*)
> FROM Participant
> WHERE ne BETWEEN 1993 AND 2003;
> ```

$\boxed{2}$ Cette deuxième requête demande de réunir les enregistrements de même difficulté afin de calculer par agrégation de leurs durées moyennes. On peut donc proposer

```
SELECT diff, AVG(duree)
FROM Rando
GROUP BY diff;
```

> Notons qu'il n'est pas clair dans le programme que `GROUP BY` soit autorisé. Par conséquent, en tirant profit du fait qu'il y a cinq difficultés possibles de randonnée, on peut également proposer la requête suivante, qui utilise l'union de plusieurs requêtes. C'est évidemment beaucoup moins élégant.
>
> ```
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 1
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 2
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 3
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 4
> UNION
> SELECT diff, AVG(duree) FROM Rando WHERE diff = 5;
> ```

$\boxed{3}$ On peut proposer une approche consistant à récupérer l'information de la difficulté de la randonnée 42, afin d'utiliser celle-ci comme requête imbriquée dans une seconde requête ayant pour but d'identifier les bons randonneurs.

```
SELECT pnom
FROM Participant
WHERE diff_max < (SELECT diff FROM Rando WHERE rid = 42);
```

> Toutefois, on peut être tenté d'effectuer une jointure, qui semble moins naturelle car il n'y a aucun lien de jointure entre les deux tables. Par conséquent, et en l'absence de ce lien, cette jointure s'apparente au produit cartésien des deux tables. On retient alors les noms des randonneurs pour lesquels la difficulté maximale supportée est inférieure à celle de la randonnée 42.
>
> ```
> SELECT pnom
> FROM Participant JOIN Rando
> WHERE rid = 42 AND diff_max < diff;
> ```

> Il est possible toutefois de faire un lien de jointure qui soit directement une inégalité, solution très proche de la précédente.
>
> ```
> SELECT pnom
> FROM Participant JOIN Rando ON diff_max < diff
> WHERE rid = 42;
> ```

4 On veut étudier tous les couples de randonnées ayant le même nom, mais pas le même identifiant, autrement dit des clefs primaires différentes. On est donc obligé de réaliser une autojointure, c'est-à-dire une jointure de la table `Rando` avec elle-même. Une fois cette jointure réalisée, et afin de distinguer les randonnées venant de chaque couple, il faut procéder à un renommage de celles-ci avec le mot-clef `AS`. Enfin, le sujet demande de réunir ces informations en supprimant les doublons, ce que l'on peut faire avec le mot-clef `DISTINCT`. Finalement, on peut proposer la requête suivante.

```
SELECT DISTINCT r1.rid
FROM Rando AS r1 JOIN Rando AS r2 ON r1.rnom = r2.rnom
WHERE r1.rid <> r2.rid;
```

> Cette question est particulièrement difficile, car il n'est pas clair que le mot-clef `DISTINCT` soit autorisé et la notion d'auto-jointure est sans doute la plus subtile de celles que l'on peut rencontrer en base de données dans le programme d'informatique de classes préparatoires. Bien comprendre cette question est toutefois très bénéfique pour le SQL en général et il est intéressant de passer le temps nécessaire à bien la saisir.

5 On utilise pour cette question ce qui est présenté dans le sujet. On commence par ouvrir le fichier, puis on lit la première ligne afin de s'en débarrasser, car elle ne sert pas dans la suite. On récupère alors les lignes les unes après les autres, en prenant soin à chaque étape d'utiliser la méthode `split` afin d'extraire les quatre données utiles, et enfin en n'oubliant pas de changer de type de variable grâce à la fonction `float`, qui convertit une chaîne de caractères en flottant. On n'oublie pas de fermer le fichier.

```
def importe_rando(nom_fichier):
    # Ouverture de nom_fichier en lecture
    fichier = open(nom_fichier, "r")
    # On lit la première ligne, qui ne sert pas
    fichier.readline()
    # On récupère les lignes suivantes
    lignes = fichier.readlines()
    fichier.close()  # Fermeture de l'objet fichier
    coords = [ ]
    for l in lignes:  # On parcourt chaque ligne du fichier
        # On découpe la ligne par rapport à la virgule
        interm = l.split(",")
        lat, lon, alt, t = interm  # On récupère chacun des 4 termes
        # Puis on les stocke en les convertissant en flottants
        coords.append([float(lat), float(lon), float(alt), float(t)])
    return coords
```

> La fermeture de fichier peut s'effectuer dès que l'ensemble des informations désirées est constitué, ce qui est le cas après la fin du `readlines`. Cette fermeture aurait tout aussi bien pu s'effectuer juste avant le `return`.

X/ENS Maths PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Julie Gauthier (professeur agrégé), Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose l'étude d'une borne supérieure définie à partir d'une norme sur les polynômes à coefficients complexes. Pour K une partie bornée, fermée et infinie de $\mathbb{C}$, on munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme infinie sur K. Il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que pour tout couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$, on a

$$\|Q\|_K \|R\|_K \geqslant \|QR\|_K$$

Le but du problème est de calculer la valeur maximale $C^K_{n,m}$ pour $Q \in \mathbb{C}_n[X] \smallsetminus \{0\}$ et $R \in \mathbb{C}_m[X] \smallsetminus \{0\}$ du quotient

$$\frac{\|Q\|_K \|R\|_K}{\|QR\|_K}$$

dans deux cas particuliers : lorsque K est égal au disque unité fermé de $\mathbb{C}$ (partie III) et lorsque K est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

- Dans la partie I, on montre des résultats généraux sur $\|\cdot\|_K$ lorsque K est une partie fermée et bornée quelconque de $\mathbb{C}$. C'est la seule partie dont la difficulté globale est raisonnable.
- Dans la partie II, on travaille avec une théorie de l'intégration légèrement plus puissante que celle au programme afin d'étudier la mesure de Mahler d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Cette mesure sera utilisée dans la partie III. Le niveau est assez soutenu car sont abordés, sans les mentionner explicitement, des résultats d'analyse complexe, un domaine des mathématiques qui n'est pas non plus au programme.
- La partie III propose d'établir une majoration optimale de $C^{\mathbb{D}}_{n,m}$, où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. L'ensemble de la partie est à la fois très technique et astucieux. Une grande partie des questions nécessite une compréhension profonde des objets manipulés.
- La dernière partie vise à calculer $C^{I}_{n,m}$ pour I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. La moitié des questions sont d'un niveau déraisonnable, même pour un sujet X/ENS.

La difficulté de ce sujet a manifestement été très mal évaluée. Si les questions 1.5, 2.13, 3.18, 3.26 et 4.44 sont ardues, les questions 3.23, 4.39 et 4.40 sont presque introuvables ! Pourtant, se frotter à ce problème est un bon entraînement. En effet, d'une part cela permet de se préparer à la gestion du temps lors d'une épreuve trop longue et trop difficile, et d'autre part le problème en lui-même permet de bien revoir une grande partie du programme : séries entières, séries numériques, intégration, équations différentielles, espace vectoriels normés. Que les élèves de la filière MP ne s'imaginent pas que ce sujet est facile puisqu'il est tombé en PC : il s'agit sûrement, pour eux aussi, d'un véritable défi !

Indications

1.1 Utiliser le fait que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, l'application $z \mapsto \mathrm{P}(z)$ est continue.

1.5 Considérer $\mathrm{M} > 0$ qui vérifie $\mathrm{M} \geqslant |z|$ pour tout $z \in \mathrm{K}$ et montrer que, pour $\rho > 0$,

$$\forall z \in \mathrm{K} \qquad \left|\frac{(\mathrm{Q}_\rho \mathrm{R}_\rho)(z)}{\mathrm{Q}_\rho(a)\mathrm{R}_\rho(b)}\right| \leqslant \frac{4\mathrm{M}^2}{\rho^2 \left|a-b\right|^2} + \left|1 - \frac{1}{\rho}\right|$$

1.6 Vérifier que E est non vide et établir que $\|\cdot\|$ est une norme sur V. Montrer que f est continue.

1.7 Utiliser la question précédente pour montrer que

$$\mathrm{C}^{\mathrm{K}}_{n,m} = \frac{\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}}\|\mathrm{R}_0\|_{\mathrm{K}}}{\|\mathrm{Q}_0\mathrm{R}_0\|_{\mathrm{K}}}$$

2.8 Découper l'intervalle d'intégration avec une subdivision composée des racines de Q.

2.10 Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour montrer la continuité de φ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et le théorème de convergence dominée pour la continuité en 0.

2.11 Utiliser la question 2.9 pour justifier que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\right|^p \,\mathrm{d}\theta > 0$.

2.12 Remarquer que $\qquad \forall p > 0 \qquad \dfrac{\varphi(p)}{p} = \dfrac{\varphi(p)-\varphi(0)}{p-0}$

2.13 Contrairement à ce que propose l'énoncé, on pourra étudier la fonction

$$f\colon \begin{cases}]\,-1\,;1\,[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad r \quad \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}/(1-r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}) \end{cases}$$

où θ est un réel quelconque. Cette fonction est développable en série entière. On pourra intégrer sa partie réelle sur $[\,0\,;r\,]$.

2.14 Utiliser la formule établie à la question précédente.

2.15 On pourra considérer $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi} \in \partial\mathbb{D}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\,0\,;1\,[^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et montrer, grâce au théorème de convergence dominée que

$$\mathrm{M}(\mathrm{X} - r_n z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(\mathrm{X}-z)$$

Pour ce faire, on pourra utiliser que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \qquad a \leqslant b \leqslant c \Longrightarrow |\ln(b)| \leqslant \max\left(|\ln(a)|, |\ln(c)|\right)$$

après avoir justifié l'encadrement

$$|\sin(\theta-\psi)| \leqslant \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - r_n z\right| \leqslant 2$$

2.16 Utiliser la question 2.14.

3.17 On pourra commencer par établir le résultat pour les polynômes de la base canonique $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

3.18 Pour montrer que $\|\mathrm{P}\|_{\partial\mathbb{D}} \geqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}}$, on pourra considérer un élément $z \in \mathbb{D}$ tel que $\|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}} = |\mathrm{P}(z)|$, utiliser la question précédente avec $r = 1-|z|$ et commencer par montrer que

$$\int_0^{2\pi} \|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}} - \left|\mathrm{P}(z + r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\right| \,\mathrm{d}\theta = 0$$

3.20 Écrire
$$\mathrm{Q} = \mu \prod_{i=1}^{k} (\mathrm{X} - r_i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R} = \gamma \prod_{i=1}^{k'} (\mathrm{X} - r_i{}')$$
et utiliser la question 3.18 pour montrer l'existence de $(u, v) \in \partial\mathbb{D}^2$ tel que
$$\|\mathrm{Q}\|_{\mathbb{D}} = |\mathrm{Q}(u)| \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{R}\|_{\mathbb{D}} = |\mathrm{R}(v)|$$

3.21 A partir d'une expression de P comme un polynôme scindé, obtenir une expression scindée de S puis utiliser les résultats des questions 2.15 et 2.16 pour montrer que
$$\mathrm{M(S)} = |\lambda| \prod_{i=1}^{m+n} \max\left(|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\right)$$

3.22 Utiliser les questions 3.18 et 3.19 pour montrer que
$$\left|\mathrm{P}\left(\frac{u\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - v}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1}\right)\right| \leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}} \max\left\{1, \left|\frac{u\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - v}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1}\right|\right\}^{n+m}$$
et en déduire que
$$\forall \theta \in \left]\,0\,;2\pi\,\right[\qquad \left|\mathrm{S}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\right| \leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}} \max\left\{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1\right|, \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - w\right|\right\}^{n+m}$$

3.23 Montrer que
$$\mathrm{I}(\psi) = \int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1\right|, \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi}\right|\right\}\right) \,\mathrm{d}\theta$$
est maximale pour $\psi = \pi$. Pour ce faire, il sera utile de remarquer que la quantité $\max\left\{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1\right|, \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi}\right|\right\}$ correspond à distance entre le point $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ et le point qui lui est le plus éloigné parmi 1 et $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi}$. En remarquant que l'intégrande est 2π-périodique, utiliser la relation de Chasles pour faire disparaitre le max dans l'argument du logarithme.

3.24 On pourra se servir du découpage de l'intégrale fait à la question précédente, utiliser la question 3.23 et effectuer une permutation série-intégrale.

3.26 Montrer que $\|\mathrm{Q}_k\mathrm{R}_k\|_{\mathbb{D}} = 2$. Penser aux sommes de Riemann.

4.27 Remarquer que, si $c < d$, la fonction
$$f\colon \begin{cases} [\,c\,;d\,] \longrightarrow [\,a\,;b\,] \\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{b-a}{d-c}(x-c) + a \end{cases}$$
est une bijection.

4.30 Considérer $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tel que $\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{I}} = |\mathrm{Q}_0|$ et $\|\mathrm{R}_0\|_{\mathrm{I}} = |\mathrm{R}_0|$. Si $x \neq y$, utiliser le résultat de la question 4.27. Sinon, poser $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_0(-x\mathrm{X})$ et $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_0(x\mathrm{X})$. Dans tous les cas, justifier que l'on peut toujours supposer Q_1 et R_1 unitaires.

4.32 Montrer que $\|\mathrm{S}_2\|_{\mathrm{I}} = \|\mathrm{Q}_2\|_{\mathrm{I}}$. On pourra remarquer que
$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad |x + 1 - |w + 1|| \leqslant |x - w|$$

4.34 En étudiant la fonction
$$g\colon \begin{cases} [\,-1\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{1-w}{(w-x)^2} \end{cases}$$
Montrer que $\|\mathrm{S}_3\|_{\mathrm{I}} = \dfrac{2}{1+w}\|\mathrm{Q}_3\|_{\mathrm{I}}$.

4.35 Considérer $w \in \mathbb{C}$ une racine de R_2 et $\mathrm{T} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{R}_2 = (\mathrm{X} - w)\mathrm{T}$. Poser

$$\mathrm{T}_2 = (\mathrm{X} - 1 + |w - 1|)\mathrm{T}$$

et raisonner comme à la question précédente en observant que

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad |x - 1 + |w - 1|| \leqslant |w - x|$$

4.36 Procéder par l'absurde et supposer que $\mathrm{R} \neq \prod\limits_{k=1}^{m} (\mathrm{X} - x_k)$. Justifier qu'il existe alors $j \in [\![\, m+1\,; n+m \,]\!]$ et $i \in [\![\, 1\,; n \,]\!]$ tels que

$$x_i \neq x_j \qquad \mathrm{R}(x_j) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(x_i) = 0$$

puis poser $$\mathrm{Q}_1 = \frac{\mathrm{X} - x_j}{\mathrm{X} - x_i}\mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_1 = \frac{\mathrm{X} - x_i}{\mathrm{X} - x_j}\mathrm{R}$$

Comparer les quantités $|1 + x_i|\,|1 - x_j|$ et $|1 - x_i|\,|1 + x_j|$.

4.37 Étudier le signe de Q' sur $]\,-\infty\,; -1\,[$ en discutant selon la parité de n.

4.38 Remarquer que, si $|\mathrm{P}(-1)| < \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}$, pour ε suffisamment petit, $\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}_\varepsilon} = \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}$.

4.39 Poser $\mathrm{T} = \mathrm{S} - \beta(\mathrm{X} + 1)$ avec $\beta = \min{(\varepsilon, \alpha)}/2$ et

$$\alpha = \inf{\{\mathrm{S}(x) \mid x \in [\,-1\,;1\,] \smallsetminus]\,x_k - \varepsilon\,; x_{k+1} + \varepsilon\,[\}}$$

Montrer ensuite que $\|\mathrm{TU}\|_{\mathrm{I}} \geqslant \|\mathrm{SU}\|_{\mathrm{I}}$ et que $\|\mathrm{TUR}\|_{\mathrm{I}} \leqslant \|\mathrm{SUR}\|_{\mathrm{I}}$. Pour établir ce second point, on pourra prendre $\varepsilon = (\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}} - \|\mathrm{P}\|_{[\,x_k\,;\,x_{k+1}\,]})/\|\mathrm{UR}\|_{\mathrm{I}}$ Un tel ε est strictement positif si l'on suppose

$$\forall y \in]\,x_k\,; x_{k+1}\,[\qquad |\mathrm{P}(y)| \leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}$$

Bien que l'énoncé ne le précise pas explicitement, on pourra supposer que les racines $x_m \leqslant \cdots \leqslant x_{m+n}$ sont distinctes deux à deux. On pourra également supposer ε assez petit de sorte que $]\,-1\,;1\,] \smallsetminus]\,x_k - \varepsilon\,; x_{k+1} - \varepsilon\,[\neq \varnothing$.

4.41 Introduire $\mathrm{U} = (n+m)^2({\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}}^2 - \mathrm{P}^2)$ et montrer qu'il a les mêmes racines que le polynôme $(1 - \mathrm{X}^2){\mathrm{P}'}^2$ en utilisant les résultats démontrés ou admis dans les questions 4.39 et 4.40. De même qu'à la question 4.39, on pourra supposer que les racines de P sont deux à deux distinctes.

4.43 Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + (n+m)^2 y = 0$$

Remarquer que $\mathrm{P}(1) > 0$ et utiliser le résultat admis par l'énoncé à la fin de la question 4.38 pour conclure.

4.44 Montrer que $|\mathrm{P}(-1)| = 2^{-n-m+1}$ en utilisant l'expression de P sur $[\,-1\,;1\,]$ obtenue à la question précédente. On pourra remarquer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad 1 - \cos(\theta) = \frac{1}{2}\left|1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right|^2$$

et utiliser la question 2.13.

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet présente le problème de l'allocation dynamique de mémoire, qui est fondamental dans le fonctionnement des systèmes d'exploitation et de la plupart des langages de programmation. C'est un important domaine de recherche et d'ingénierie : des algorithmes utilisant des idées semblables à celles présentées ici sont utilisés en permanence par les OS modernes et par les applications. Le sujet est de difficulté croissante et à aborder dans l'ordre puisque chaque partie repose sur la précédente.

- En guise d'introduction, la partie I pose trois questions faciles pour réaliser une première implémentation naïve.
- La partie II introduit la notion d'en-têtes à chaque portion de mémoire. Ces métadonnées permettent de recycler la mémoire qui n'est plus utilisée.
- Dans la partie III, les métadonnées sont complexifiées et dupliquées afin de permettre la fusion de portions libres consécutives. L'une des questions d'implémentation de cette partie est particulièrement difficile.
- Enfin, la partie IV introduit une amélioration du système précédent qui consiste à maintenir une chaîne des portions libres permettant de parcourir rapidement ces dernières.

Le sujet ne comporte que 15 questions ; c'est peu, mais les enjeux sont autant la rapidité que la justesse. En effet, l'implémentation des fonctions `reserver` et `liberer` des deux dernières parties est complexe, et propice à de nombreuses erreurs de logique ou de décalage d'indices, surtout sur papier. Néanmoins, le sujet est très guidé et bien posé. Plusieurs pages ne comportent pas de question mais sont à lire attentivement puisqu'elles présentent les principes des algorithmes étudiés ou les fonctions à utiliser pour les implémentations. On pourra d'ailleurs noter que cette pratique d'encapsulation du code derrière des interfaces que l'on peut utiliser sans connaître leur fonctionnement interne est un pilier de la programmation orientée objet, un paradigme de programmation utilisé par exemple dans les langages Python, Java, C++, etc. C'est un très bon sujet d'entraînement, que l'on peut aborder dès la première année pour tester sa capacité à écrire du code sans faute.

Indications

Partie I

3 Ne pas oublier de gérer le cas où la mémoire est trop pleine pour effectuer l'allocation.

Partie II

5 Pour parcourir la mémoire, les blocs étant de taille fixe, il est approprié d'utiliser une boucle `for` avec un incrément adapté. Utiliser la fonction `initialiser` de la question 1. Prendre soin de bien gérer les cas particuliers (taille demandée supérieure à la taille d'un bloc ou allocation à la fin impossible par manque de place).

Partie III

7 On pourra imaginer la représentation binaire de l'entier dans l'en-tête et le pied de page.

8 Utiliser, entre autres, la fonction `marque_reservee` fournie par l'énoncé.

9 Commencer par un parcours des portions successives pour en chercher une libre et de taille suffisante. Le cas échéant, on effectue l'allocation, on crée éventuellement une section libre avec le reliquat et on retourne immédiatement. Si on arrive à l'épilogue sans avoir trouvé de portion adaptée, on alloue sur place en décalant l'épilogue après avoir vérifié que la place disponible est suffisante.

10 Si la portion suivante est libre, on peut augmenter la taille de la portion libérée. Si la portion précédente est libre, on en augmente la taille et on déplace également le pointeur qui en marque le début.

Partie IV

11 Commencer par le cas où la chaîne est initialement vide. Faire un schéma pour voir quelles relations (successeur ou prédécesseur) sont réécrites, et où. Faire de même pour le cas général.

12 Observer que pour supprimer une portion de la chaîne, il suffit de raccorder son prédécesseur et son successeur. Vérifier les cas limites lorsque la portion est en entrée ou à la fin de la chaîne.

13 Ne pas oublier que la variable globale `PROLOGUE` a été modifiée.

14 Les lignes de l'implémentation précédente à modifier sont celles qui effectuent le parcours des portions à la recherche d'une portion recyclable. Il faut également ajouter des appels à `supprime_dans_chaine` et `ajoute_en_entree_de_chaine` pour maintenir la chaîne à jour.

15 Ajouter trois lignes à la fonction `liberer` de la question 10 : deux appels à `supprime_dans_chaine` et un à `ajoute_en_entree_de_chaine`.

I. Implémentation naïve

1 La fonction `initialiser` remplit avec le caractère `c` les cases de mémoire situées entre les indices `p` inclus et `p+n` exclu.

```
def initialiser(p, n, c):
    for i in range(n):
        mem[p+i] = c
```

> La fonction `initialiser` n'est pas une des cinq faisant partie de l'interface du service. C'est donc une fonction auxiliaire, à usage interne (appelée par `reserver`). Il convient ici, comme d'habitude, de lire les questions un peu en avance afin de ne pas déjà implémenter dans `initialiser` ce qui doit l'être dans `reserver`.

2 La fonction `demarrage` doit placer la mémoire dans un état prêt à recevoir des demandes d'allocation. Initialement, la mémoire est vide et la seule case qui sera lue avant d'être écrite est `mem[0]`. On doit donc s'assurer que sa valeur est correcte pour la première utilisation de la mémoire. Cette case indiquant le début de la prochaine portion libre, sa valeur initiale doit être `1`.

```
def demarrage():
    mem[0] = 1
```

3 Dans la fonction `reserver`, on commence par s'assurer que la mémoire disponible est suffisante pour effectuer l'allocation. Si ce n'est pas le cas, on retourne directement `None`, comme demandé. Si tout va bien, on initialise la portion demandée à l'aide de la fonction écrite à la question 1 et on change la valeur de la première case, sans oublier de retourner l'indice de la portion allouée.

```
def reserver(n, c):
    p = mem[0]
    if p + n > TAILLE_MEM:
        return None
    initialiser(p, n, c)
    mem[0] += n
    return p
```

> Pour vérifier si le test sur la mémoire disponible doit être implémenté à l'aide d'une inégalité large ou stricte, on peut compter les cases du schéma donné dans l'énoncé. Pour `TAILLE_MEM = 30` et `mem[0] = 19`, on peut allouer au maximum 11 cases, une douzième case serait de trop. Comme $19+11=30$ et $19+12=31$, on doit utiliser une inégalité stricte à la troisième ligne.
>
> On aurait pu exploiter le fait que les fonctions Python retournent implicitement `None` lorsque l'exécution arrive à leur fin pour écrire :
>
> ```
> def reserver(n, c):
>     p = mem[0]
>     if p + n <= TAILLE_MEM:
>         initialiser(p, n, c)
>         mem[0] += n
>         return p
> ```

> C'est une bonne pratique de signaler les erreurs de manière explicite et le plus tôt possible, ce qui permet également de réduire le niveau d'indentation moyen du code et de le rendre plus compréhensible.

Pour calculer la complexité de la fonction, il faut compter le nombre d'opérations élémentaires effectuées par celle-ci. La fonction `reserver` est sans boucle ni récursion, et la seule fonction qu'elle appelle est `initialiser`, qui effectue un nombre d'opérations proportionnel à `n`. **Par conséquent, la complexité de la fonction est en $\mathbf{O}(n)$ et ne dépend pas de la taille totale de la mémoire.**

II. Réservations de blocs de tailles fixes

$\boxed{4}$ Pour l'initialisation de la mémoire, il s'agit de s'assurer, comme à la question 2, que la première case pointe au bon endroit. Il est inutile d'initialiser les en-têtes, puisque l'allocation de mémoire à partir de `mem[0]` réserve des blocs neufs, jamais encore réservés, et donc ne lit pas leurs en-têtes. Puisque `mem[0]` ne pointe pas vers l'en-tête d'un bloc, mais vers le début d'une portion de données, sa valeur initiale est ici 2 et non plus 1 comme à la question 2.

```
def demarrage():
    ecrire_prochain(2)
```

$\boxed{5}$ On peut commencer par vérifier que la taille de mémoire demandée ne dépasse pas d'un bloc. Puis, s'il existe un bloc libre à recycler, on doit l'utiliser. On en recherche donc un, en itérant sur les emplacements des portions, de la première, incluse, à celle désignée par `mem[0]`, exclue, au moyen de la fonction `range` dont le troisième argument indique l'incrément. Si la recherche échoue, après avoir vérifié que la mémoire disponible est suffisante, on effectue l'allocation d'un bloc sur la portion pointée par `mem[0]` et on met à jour la prochaine portion libre si besoin.

```
def reserver(n, c):
    if n + 1 > TAILLE_BLOC:
        return None
    # Recherche d'un bloc libre à recycler
    for p in range(2, lire_prochain(), TAILLE_BLOC):
        if est_libre(p):
            marque_reservee(p)
            initialiser(p, n, c)
            return p
    # Pas de bloc libre trouvé : allocation à la fin si possible
    p = lire_prochain()
    if p + TAILLE_BLOC - 1 > TAILLE_MEM:
        return None
    ecrire_prochain(p + TAILLE_BLOC)
    marque_reservee(p)
    initialiser(p, n, c)
    return p
```

> Ici encore, ne pas hésiter à compter les cases à la main et à jouer avec les dimensions pour vérifier que les tests sont corrects.