SUJETS CORRIGÉS
NOUVELLE ÉPREUVE
ANTICIPÉE DU BAC

1re
MATHS
Spécialité

Cours

Exos minute

Exercices corrigés

ellipses

1 Fonctions de référence

Le point histoire

Dès l'apparition du raisonnement mathématique complexe, dans les civilisations babylonienne et grecque de l'antiquité, germa l'idée d'une relation entre différentes quantités.

Ainsi, Claude Ptolémée (≈100-≈168), dans son *Almageste*, donne un tableau donnant les longueurs des cordes de cercles dont le rayon est connu : ce sont les célèbres tables de sinus. Toutefois on n'étudie pas alors le processus qui permet de passer d'une colonne à l'autre dans ces tables (ce que dans les mathématiques modernes, nous appelons « fonction »).

Il faudra attendre le XVII^e siècle et le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), pour que le mot « fonction » apparaisse en géométrie. Leibniz désigne ainsi des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques. Un peu plus tard, Jean Bernoulli (1667-1748) propose la notation : ϕx (prononcé « phi x »).

Au XIX^e siècle, Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) introduit la fonction caractéristique des nombres irrationnels (qui prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon), qui est discontinue partout et apporte alors la rigueur que l'on connaît aujourd'hui pour la définition d'une fonction.

1 Prérequis et rappels

En Seconde, un catalogue de fonctions élémentaires a été vu. On rappelle ici les fonctions à connaître, leurs ensembles de définition, quelques propriétés, et les allures de leurs représentations graphiques.

1.1 Fonctions constantes, linéaires et affines

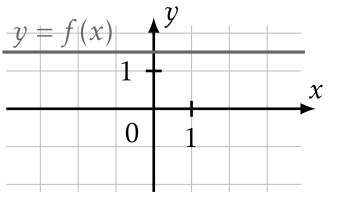
Rappels

Les fonctions constantes sont :

- définies sur $\mathbb{R}$;
- définies par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on associe toujours le même nombre k ;
- notées $f : x \mapsto k$.

Représentation graphique

Dans l'exemple représenté ci-contre, pour tout nombre réel x, $f(x) = 1{,}5$.



Rappels

Les fonctions linéaires sont :

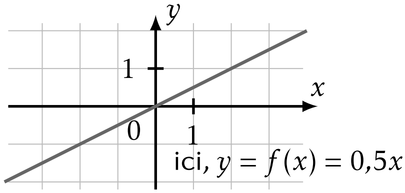
- définies sur $\mathbb{R}$;
- définies par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on associe le résultat de la multiplication de x par toujours le même nombre m ;
- notées $f : x \mapsto mx$.

Remarques

- m est appelé le **coefficient directeur** de la fonction linéaire, et il s'agit aussi du coefficient directeur de la droite qui la représente graphiquement ;
- m est aussi le coefficient de proportionnalité de toutes les situations modélisées par cette fonction ;
- $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pour tous nombres réels a et b.

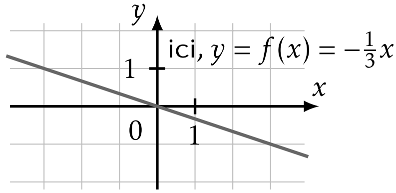
Représentation graphique

Fonction linéaire croissante :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Fonction linéaire décroissante :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

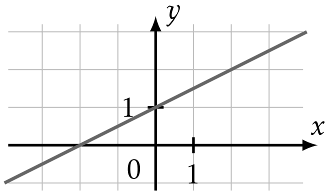
Rappels

Les fonctions affines sont :

- définies sur $\mathbb{R}$;
- définies par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on associe le résultat de la multiplication de x par toujours le même nombre m , suivie de l'addition de toujours le même nombre p (qui peut être négatif, auquel cas on voit apparaître une soustraction) ;
- notées $f : x \mapsto mx + p$.

Représentation graphique

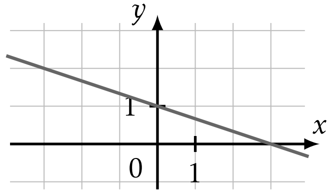
Fonction affine croissante :



ici, $y = f(x) = 0{,}5x + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↗	$+\infty$

Fonction affine décroissante :



ici, $y = f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	$-\infty$

Remarques

- m est appelé le **coefficient directeur** de la fonction affine, il s'agit aussi du coefficient directeur de la droite qui la représente graphiquement ;
- p est appelé **ordonnée à l'origine**, il s'agit de l'ordonnée du point d'intersection de la droite qui la représente avec l'axe des ordonnées ;
- $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour tous nombres réels a et b distincts.

Propriétés

- Une fonction linéaire ou affine de coefficient directeur m est croissante si et seulement si m est positif, elle est décroissante si et seulement si m est négatif.
- Une fonction constante est aussi affine : c'est le cas particulier où $m = 0$.
- Une fonction linéaire est aussi affine : c'est le cas particulier où $p = 0$.
- Deux fonctions affines de même coefficient directeur sont représentées par deux droites parallèles.

Exo minute 1.A

Les fonctions f, g, h et j suivantes sont-elles des fonctions affines ? Autrement dit : sont-elles (ou peut-on modifier leur écriture pour qu'elles soient) de la forme $x \mapsto mx + p$?

1► $f(x) = 8x + 3$

2► $g(x) = \dfrac{3}{4}x - 7$

3► $h(x) = \dfrac{x}{8} + 6$

4► $j(x) = -\dfrac{5x}{3+x}$

Exo minute 1.B

On considère la fonction affine f vérifiant $f(3) = 2$ et $f(7) = -2$.
Déterminer une expression algébrique de la fonction f.

Corrigé de l'exo minute 1.A

1▸ $f(x) = 8x + 3$ est une fonction affine avec $m = 8$ et $p = 3$.

2▸ $g(x) = \frac{3}{4}x - 7$ est une fonction affine avec $m = \frac{3}{4}$ et $p = -7$

3▸ $h(x) = \frac{x}{8} + 6$ est une fonction affine avec $m = \frac{1}{8}$ et $p = 6$

4▸ $j(x) = -\frac{5x}{3+x}$ n'est pas une fonction affine car on ne peut pas simplifier son écriture sous une forme « $mx + p$ ».

Corrigé de l'exo minute 1.B

f est affine donc il existe un nombre m et un nombre p tels que $f(x) = mx + p$ qu'il faut déterminer.

$m = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{-2-2}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

Ainsi $f(x) = -x + p$. Or $f(3) = 2$ d'après l'énoncé. En remplaçant x par 3 dans l'expression précédente, on obtient $f(3) = -3 + p$ qui est donc égal à 2.

On résout l'équation $-3 + p = 2$ dont la solution est $p = 5$.

Donc $f(x) = -x + 5$.

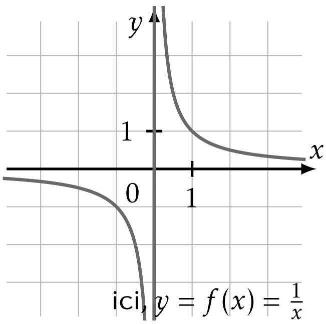
1.2 Fonctions inverse, carré, cube et racine carrée

Rappels

La fonction inverse est :

- définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ (noté aussi $\mathbb{R}^*$) ;
- définie par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}^*$ on associe son inverse $\frac{1}{x}$;
- notée $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Représentation graphique



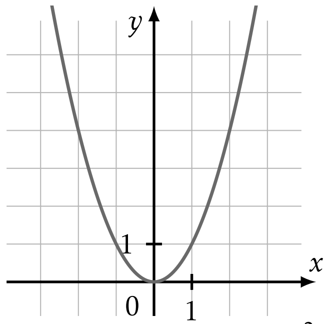
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Rappels

La fonction carré est :

- définie sur $\mathbb{R}$;
- définie par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on associe son carré x^2 ;
- notée $f : x \mapsto x^2$.

Représentation graphique



ici, $y = f(x) = x^2$

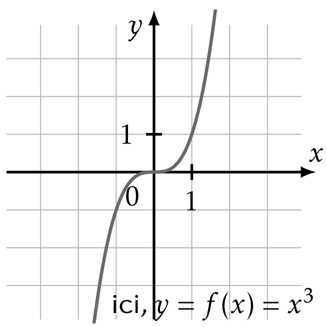
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Rappels

La fonction cube est :

- définie sur $\mathbb{R}$
- définie par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on associe son cube x^3
- notée $f : x \mapsto x^3$

Représentation graphique



ici, $y = f(x) = x^3$

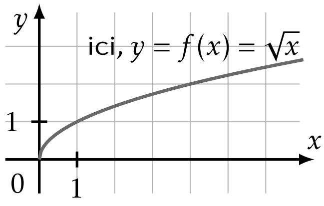
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Rappels

La fonction racine carrée est :

- définie sur $[0;+\infty[$ (noté aussi $\mathbb{R}_+$)
- définie par : à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+$ on associe sa racine carrée $\sqrt{x}$
- notée $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Représentation graphique



x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

Exo minute 1.C

Les canettes utilisées par un fabricant de soda sont assimilées à des cylindres dont la hauteur est égale à cinq fois leur rayon. On appelle V la fonction qui, à tout rayon r du disque de base exprimé en cm, associe le volume de la canette en cm^3.

1► Déterminer l'ensemble de définition D_V de la fonction V.

2► Exprimer $V(r)$ en fonction de r.

Corrigé de l'exo minute 1.C

1► r est un rayon d'un disque donc il est forcément strictement positif. Ainsi le domaine de définition de V est $D_V =]0;+\infty[$.

2► $V(r) =$ Aire de la base × hauteur $= \pi r^2 \times 5r = 5\pi r^3$.

Rappels

- La fonction « inverse » est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et aussi sur $]0;+\infty[$.
- La fonction « carré » est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Son minimum est 0 et est atteint quand $x = 0$, et elle est donc positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction « cube » est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

À retenir

Les allures des représentations graphiques de ces fonctions, et leurs tableaux de variations, rappelés ci-dessus, doivent être connus.

Exo minute 1.D

En utilisant les variations des fonctions de référence et le rappel ci-dessus, comparer en justifiant :

1▶ $2{,}5^2$ et $1{,}6^2$

2▶ $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{7}$

3▶ $-\dfrac{1}{2{,}1}$ et $-\dfrac{1}{4{,}7}$

4▶ $3{,}2^3$ et $9{,}5^3$

5▶ $(-10)^3$ et 3^3

Corrigé de l'exo minute 1.D

1▶ $1{,}6 < 2{,}5$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $1{,}6^2 < 2{,}5^2$ ou $2{,}5^2 > 1{,}6^2$.

2▶ $3 < 7$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\frac{1}{3} > \frac{1}{7}$.

3▶ $2{,}1 < 4{,}7$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\frac{1}{2{,}1} > \frac{1}{4{,}7}$. De plus, la fonction qui à x associe $-x$ est une fonction linéaire de coefficient -1 (donc négatif) et elle est donc strictement décroissante. En appliquant cette fonction aux deux membres de l'inégalité précédente, on obtient $-\frac{1}{2{,}1} < -\frac{1}{4{,}7}$.

4▶ $3{,}2 < 9{,}5$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $3{,}2^3 < 9{,}5^3$.

5▶ $-10 < 3$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $(-10)^3 < 3^3$.

Exercice 1.1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - 4$.

1▶ Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$.

2▶ Démontrer que f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

3▶ En déduire le tableau de variation de f.

4▶ Quel est le minimum de f ? En quelle valeur de x est-il atteint ?

Aide :

2 Les fonctions en langage Python

Rappel

Une fonction en Python est introduite par le mot clé `def` suivie par le nom donné à la fonction et le ou les éventuel(s) paramètre(s).

Exemple

La fonction affine $f : x \mapsto 3x + 2$ pourra être codée ainsi dans un éditeur Python :

Code Python

```
def f(x):
    return 3*x+2
```

Il reste alors à appeler la fonction dans l'interpréteur Python, via la commande : `>>> f(5)` par exemple. L'interpréteur affichera alors le résultat 17 après avoir effectué le calcul $3 \times 5 + 2$.

Exercice 1.2

1► Coder la fonctions inverse, la fonction carré et la fonction cube en Python.

2► Faire afficher les images de 3, -1 et 0 par chacune de ces fonctions. Que se passe-t-il pour l'image de 0 par la fonction inverse ?

3 Fonction valeur absolue

Définition

La fonction « valeur absolue » est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\rightarrow$ à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ on associe $\begin{cases} -x & \text{si } x \text{ est négatif} \\ x & \text{si } x \text{ est positif} \end{cases}$

Notation

On note $f : x \mapsto |x|$

Remarque

Cela signifie que cette fonction « rend tout positif » en changeant le signe si nécessaire.

Exemples

- $|6| = 6$
- $|-3| = 3$
- $|x-2|$ vaut $x-2$ seulement lorsque $x-2 \geq 0$. Sinon, elle vaut $-(x-2)$ c'est-à-dire $2-x$.

  Or $x-2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2$. Donc $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{sinon.} \end{cases}$

Exo minute 1.E

Donner la valeur absolue de :

- -3
- $\frac{3}{4}$
- $-\frac{1}{3}$
- $\sqrt{2}$
- 6
- $-\frac{-3}{8}$

Corrigé de l'exo minute 1.E

- 3
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{1}{3}$
- $\sqrt{2}$
- 6
- $\frac{3}{8}$

Exo minute 1.F

En discutant suivant les valeurs de x, écrire chacune des expressions suivantes sans la notation « valeur absolue ».

1► $|x-2|$ 2► $|x+5|$ 3► $|6-x|$ 4► $|2x-3|$

Corrigé de l'exo minute 1.F

1► L'expression $x-2$ est positive lorsque $x \geq 2$. Ainsi, si $x \geq 2, |x-2| = x-2$, et sinon $|x-2| = -(x-2) = 2-x$.

2► L'expression $x+5$ est positive lorsque $x \geq -5$. Ainsi, si $x \geq -5, |x+5| = x+5$, et sinon $|x+5| = -(x+5) = -x-5$.

3► $6-x \geq 0 \Longleftrightarrow 6 \geq x$. Ainsi, si $x \leq 6, |6-x| = 6-x$, et sinon $|6-x| = -(6-x) = x-6$.

4► $2x-3 \geq 0 \Longleftrightarrow 2x \geq 3 \Longleftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Ainsi, si $x \geq \frac{3}{2}, |2x-3| = 2x-3$, et sinon $|2x-3| = -(2x-3) = 3-2x$.

Exercice 1.3

1► Résoudre les équations suivantes

a. $|x-8| = 1$ b. $|7-x| = 5$ c. $|x-4| = -2$

2► Résoudre les inéquations suivantes

a. $|x+3| \leq 5$ b. $|x-2| > 10$ c. $|x-4| < -1$

Propriété

La fonction valeur absolue est paire.

Démonstration

D'une part, lorsque x est négatif, $-x$ est positif donc :

$$\begin{cases} |-x| = -x \\ |x| = -x \end{cases} \quad \text{(par définition de la valeur absolue).}$$

Ainsi $|-x| = |x|$.

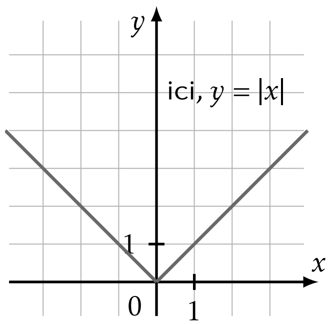
D'autre part, lorsque x est positif, $-x$ est négatif donc :

$$\begin{cases} |-x| = x \\ |x| = x \end{cases} \quad \text{(par définition de la valeur absolue).}$$

Ainsi $|-x| = |x|$.
On obtient que $|-x| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ce qui signifie que la fonction valeur absolue est paire. □

Représentation graphique

La fonction valeur absolue est représentée graphiquement ci-contre :



Remarque

C'est une fonction « affine par morceaux » :

- le premier « morceau », pour $x \in]-\infty; 0]$ est la fonction affine $x \mapsto -x$;
- le second « morceau », sur $[0; +\infty[$ est la fonction affine $x \mapsto x$.

Exercice 1.4

1► Démontrer que la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2► En déduire son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

3► Quel est son minimum sur $\mathbb{R}$ et pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 1.5

Soit $x \in [2; 9]$. Donner un encadrement de $-3 + 2|x|$

Exercice 1.6

Soit $x \in [-7; 4]$. Donner un encadrement de $3 - 4|x|$

Exercice 1.7

Résoudre algébriquement l'inéquation $|5 - x| < 6$

Aide :

4 Polynômes du second degré

4.1 Rappels

Rappel

Soient a et b n'importe quels nombres réels. Alors on a les égalités :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

On les appelle les **identités remarquables**.

Remarques

De gauche à droite, c'est le sens du **développement** : le produit devient une somme algébrique. Les identités remarquables ne sont pas nécessaires mais permettent de gagner du temps.
De droite à gauche, c'est le sens de la **factorisation** : la somme algébrique devient un produit. Les identités remarquables permettent donc (parfois) de factoriser même s'il n'y a pas de facteur commun.

Exo minute 1.G

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables.

1► $(2x+1)^2$ | 2► $(7-3t)^2$ | 3► $(x+3)(x-3)$ | 4► $(8-2\sqrt{3})^2$

Exo minute 1.H

Factoriser en utilisant les identités remarquables.

1► x^2+2x+1 | 3► $49x^2-100$
2► $100t^2-40t+4$ | 4► $t^2+16-8t$

Corrigé de l'exo minute 1.G

1►

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x + 1^2$$
$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

2►

$$(7-3t)^2 = 7^2 - 2\times 7\times 3t + (3t)^2$$
$$(7-3t)^2 = 49 - 42t + 9t^2$$

3► $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

4►

$$(8-2\sqrt{3})^2 = 8^2 - 2\times 8\times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2$$
$$(8-2\sqrt{3})^2 = 64 - 32\sqrt{3} + 2^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$(8-2\sqrt{3})^2 = 64 - 32\sqrt{3} + 4\times 3$$
$$(8-2\sqrt{3})^2 = -32\sqrt{3} + 76$$

Corrigé de l'exo minute 1.H

Pour tous ces exemples, il faut faire apparaître la forme d'une identité remarquable, comme dans la question 1 ►.

1►

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2\times x \times 1 + 1^2$$
$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

2► $100t^2 - 40t + 4 = (10t)^2 - 2\times 10t\times 2 + 2^2 = (10t-2)^2$

3► $49x^2 - 100 = (7x)^2 - 10^2 = (7x+10)(7x-10)$

4► $t^2 + 16 - 8t = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$

4.2 Forme développée réduite

Définition

Une fonction **polynôme du second degré** (ou : de degré 2) est une fonction **qui peut s'écrire** de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels.

Cette forme d'écriture s'appelle la forme **développée réduite** du polynôme.

Remarque

La condition $a \neq 0$ est nécessaire, car si $a = 0$, il s'agit d'une fonction affine (qui n'est rien d'autre qu'un polynôme de degré 1).

Exo minute 1.I

Pour chacun de ces polynômes du second degré, donner les valeurs de a, b et c.

1► $f(x) = x^2 - 7x + 12$

2► $g(x) = x^2$

3► $h(x) = 5x^2 - 1$

4► $i(x) = 2x^2 - x$

Corrigé de l'exo minute 1.I

Attention aux signes !

1► Pour $f(x) = x^2 - 7x + 12$, $a = 1$, $b = -7$, $c = 12$.

2► Pour $g(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

3► Pour $h(x) = 5x^2 - 1$, $a = 5$, $b = 0$, $c = -1$.

4► Pour $i(x) = 2x^2 - x$, $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$.

Attention

Parfois certaines expressions n'ont pas d'emblée la forme ax^2+bx+c. Ces expressions peuvent malgré tout être des polynômes du second degré.

Exo minute 1.J

On considère l'expression : $f(x) = x^3 - (x^2-1)(x+1)$.

1▶ Développer et réduire l'expression de f.

2▶ En déduire qu'il s'agit d'une fonction polynôme du second degré, pour laquelle vous déterminerez les coefficients a, b et c.

Corrigé de l'exo minute 1.J

1▶

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - (x^2-1)(x+1) \\ &= x^3 - \left(x^3 + x^2 - x - 1\right) \\ &= \cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x^2 + x + 1 \\ &= -x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

2▶ Et on a donc $a=-1$, $b=1$ et $c=1$.

Exercice 1.8

Montrer que la fonction g définie par $g(x) = -2(x+1)^2+7$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré et déterminer ses coefficients a, b et c.

4.3 Représentation graphique

Définition

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une courbe nommée « parabole ».

Propriété

Dans l'écriture développée réduite ax^2+bx+c, le nombre « c » est l'ordonnée du point de la parabole qui a pour abscisse 0.

Démonstration

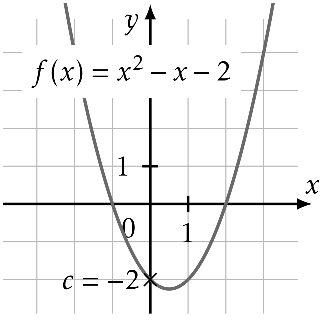
Soit M ce point d'abscisse $x_M = 0$.
Alors $y_M = f(x_M) = a{x_M}^2 + bx_M + c = a\times 0^2 + b\times 0 + c = c$. □

Exemple

On a représenté dans un repère orthonormé la parabole qui représente la fonction

$$f : x \mapsto x^2 - x - 2$$

Le nombre $c = -2$ est bien l'ordonnée du point d'abscisse 0.



Propriétés

- Les branches de la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ sont orientées vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.
- Si le repère est orthogonal, cette parabole admet un axe de symétrie qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriétés

Une fonction polynôme du second degré peut-être :

- Soit strictement décroissante puis strictement croissante (si $a > 0$) et elle admet alors un minimum.
- Soit strictement croissante puis strictement décroissante (si $a < 0$) et elle admet alors un maximum.

Définition

Le point de la parabole où celle-ci change de variation s'appelle son sommet, souvent noté S.

Propriétés

Si on note $(x_S; y_S)$ les coordonnées du sommet, alors la parabole admet pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = x_S$. La fonction polynôme associée admet son extremum (maximum ou minimum selon les cas) y_S en x_S.

On peut démontrer le résultat suivant que vous pourrez utiliser :

Propriété

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors l'abscisse du sommet S de sa parabole est $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ (son ordonnée y_S étant par conséquent $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$).

Démonstration

Vous trouverez la démonstration page 51.

4.4 Forme factorisée

Théorème

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (où a, x_1 et x_2 sont des nombres réels, et $a \neq 0$) est une fonction polynôme du second degré.
- On a alors $f(x) = a(x^2 - sx + p) = ax^2 - asx + ap$ où s désigne la somme de x_1 et x_2 et p leur produit.

Démonstration

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a\left(x^2 - x \times x_2 - x_1 \times x + x_1 \times x_2\right) \\ &= a\left(x^2 - x \times (x_1 + x_2) + x_1 x_2\right) \end{aligned}$$

En notant $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1 x_2$, on obtient bien

$$f(x) = a(x^2 - sx + p) = ax^2 - asx + ap$$

Ainsi, f est bien une fonction du second degré et vérifie l'égalité avancée ci-dessus. □

Définition

On appelle **racines** d'un polynôme du second degré les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

Propriétés

- Une fonction définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$ admet exactement deux racines réelles qui sont x_1 et x_2.

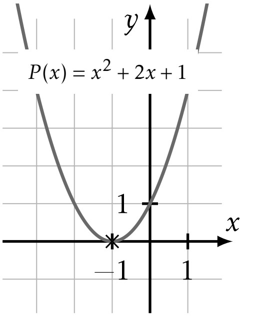
- Une fonction polynôme qui a deux racines, et dont la forme factorisée est $a(x-x_1)(x-x_2)$ a sa parabole qui coupe l'axe des abscisses en $x = x_1$ et $x = x_2$.
- Si on obtient deux racines réelles identiques ($x_1 = x_2 = k$), on dit que le polynôme a une **racine double**. Dans ce cas la parabole est tangente à l'axe des abscisses au point d'abscisse k.

Démonstration

Il s'agit de la résolution d'une équation produit nul $f(x) = 0$, comme vu en 3ème. □

Exemple

Le polynôme $P(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$ admet « deux » racines qui sont en fait la même : -1 et -1.
On dira donc que -1 est une racine double de P.
La parabole est bien **tangente** à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1.



Méthode *Détermination du signe d'un polynôme du 2nd degré*

Pour déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré suivant les valeurs de x, une première méthode est d'utiliser la forme factorisée et de dresser un tableau de signes pour chaque facteur puis d'utiliser la règle des signes vue au collège.

Exemple

Considérons la fonction $f : x \mapsto 6(x-2)(x+1)$.
On étudie le signe de $x-2$ et le signe de $x+1$ suivant les valeurs de x.

$$x-2 < 0 \Longleftrightarrow x < 2$$

$$x+1 < 0 \Longleftrightarrow x < -1$$

On en déduit :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve bien le fait que x_1 et x_2 sont des racines, puisque la fonction f y est nulle.

Exo minute 1.K

Étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)(x+5)$.

Exo minute 1.L

Étudier le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

Exo minute 1.M

On considère la fonction g définie par $g(x) = 10(2x-1)(x-10)$ sur $\mathbb{R}$.

1► Factoriser le premier facteur afin d'obtenir g sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$.

2► En déduire les racines de g.

3► Etudier le signe de g suivant les valeurs de x.

Corrigé de l'exo minute 1.K

$x-3<0 \iff x<3$ et $x+5<0 \iff x<-5$. On en déduit :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+5)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exo minute 1.L

$x-\frac{3}{4}<0 \iff x<\frac{3}{4}$ et $x+\frac{5}{2}<0 \iff x<-\frac{5}{2}$. On en déduit :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-\frac{2}{3}$		$-$		$-$		$-$	
$\left(x-\frac{3}{4}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+\frac{5}{2}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Corrigé de l'exo minute 1.M

1▸ $g(x) = 10(2x-1)(x-10) = 10\times 2\times(x-\frac{1}{2})(x-10) = 20(x-\frac{1}{2})(x-10)$.

2▸ Les racines de g sont $\frac{1}{2}$ et 10.

3▸ $x-\frac{1}{2}<0 \Longleftrightarrow x<\frac{1}{2}$ et $x-10<0 \Longleftrightarrow x<10$. On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		10		$+\infty$
$(x-\frac{1}{2})$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-10)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Théorème *admis*

Une fonction polynôme du second degré qui s'annule en x_1 et x_2 peut toujours s'écrire sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ pour un certain réel a.

Exemple

Si on parle d'une fonction polynôme du second degré qui vaut 0 en 3 et en 5, il s'agit d'une fonction de la forme $a(x-3)(x-5)$. Il faut ensuite déterminer la valeur du a si c'est possible à l'aide de l'énoncé.

Méthode *Factorisation d'un polynôme du 2nd degré*

Pour factoriser un polynôme du second degré donné sous forme développée réduite ax^2+bx+c, on va donc devoir déterminer ses racines. Dans l'état actuel de nos connaissances, pour cela, on commence par factoriser le polynôme par a : on obtient $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ puis on trouve les racines...

- ...soit parce qu'elles sont évidentes : on essaie « à la main » les nombres entiers relatifs $\ldots\ -2, -1, 0, 1$ et $2, \ldots$
- ...soit parce qu'on peut les déterminer facilement à l'aide du fait que leur somme vaut $-\frac{b}{a}$ et leur produit vaut $\frac{c}{a}$ (Attention aux signes!)
- ... soit en mélangeant les deux méthodes, ou en utilisant une identité remarquable etc.

Remarques

- On verra plus loin (cf. page 54) une méthode systématique pour déterminer les racines ;
- le deuxième point se justifie en développant la forme factorisée et en identifiant les monômes.

Exemples

- On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
  On remarque que $f(2) = 0$. Donc 2 est une racine.
  On remarque que $f(-1) = 0$ Donc -1 est une racine (ou encore : on trouve le -1 grâce au fait que 2+ « l'autre racine » égale 1 ou que 2× « l'autre racine » égale -2).
  Donc $f(x) = (x-2)(x+1)$
- On considère la fonction $g : x \mapsto 2x^2 - 24x + 70$ pour $x \in \mathbb{R}$.
  $g(x) = 2(x^2 - 12x + 70)$ donc $a = 2$ et si g admet deux racines, leur somme vaut 12 et leur produit vaut 35.
  On « essaie » les nombres entiers dont le produit vaut 35 et on remarque que 7 et 5 conviennent.
  On en déduit que $g(x) = 2(x-7)(x-5)$.

Exo minute 1.N

Factoriser la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $u : x \mapsto x^2 - 4$

Exo minute 1.O

Factoriser la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $v : x \mapsto x^2 - 3x + 2$

Exo minute 1.P

Factoriser la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $w : x \mapsto 5x^2 - 15x - 50$

Corrigé de l'exo minute 1.N

On reconnaît la 3ème identité remarquable :
$u(x) = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

Corrigé de l'exo minute 1.O

On remarque que $v(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$. Donc 1 est une racine.
Puis on peut vérifier - au choix - que $1 + 2 = 3$ et $1 \times 2 = 2$
OU que $v(2) = 0$ en essayant d'autres valeurs.
On en déduit que $v(x) = (x-1)(x-2)$.

Corrigé de l'exo minute 1.P

On commence par factoriser par le coefficient a :
$w(x) = 5x^2 - 15x - 50 = 5(x^2 - 3x - 10)$
On cherche maintenant des nombres dont la somme vaut 3 et le produit vaut -10.
On remarque que $5 \times 2 = 10$. On va donc chercher si un des couples $(5;-2)$ et $(-5;2)$ convient, c'est-à-dire si la somme des deux vaut 3. Il s'avère que $5 + (-2) = 3$.
On en déduit que $w(x) = 5(x-5)(x+2)$.

Théorème

- Un polynôme du second degré qui est factorisable (i.e. qui possède des racines) et dont le coefficient a est **positif** sera négatif entre ses racines et positif ailleurs.

  S'il n'est pas factorisable, il est toujours strictement positif.
- Un polynôme du second degré qui est factorisable (i.e. qui possède des racines) et dont le coefficient a est **négatif** sera positif entre ses racines et négatif ailleurs.

  S'il n'est pas factorisable, il est toujours strictement négatif.

Remarques

Si a est strictement positif, la parabole a une forme de « $\cup$ ».
Si le polynôme a des racines, c'est que « le $\cup$ coupe l'axe des abscisses ».
Et donc la courbe passe en dessous de l'axe des abscisses (i.e. la fonction devient négative) entre les racines.

Si a est strictement négatif, la parabole a une forme de « $\cap$ ».
Si le polynôme a des racines, c'est que « le $\cap$ coupe l'axe des abscisses ».
Et donc la courbe passe au dessus de l'axe des abscisses (i.e. la fonction devient positive) entre les racines.

5 Exercices

Exercice 1.9

Sans calculatrice, exprimer les nombres suivants sans utiliser la notation de la valeur absolue.

1► $|-9|$;
2► $|3-\sqrt{5}|$;
3► $|x-6|$.

Exercice 1.10

L'algorithme ci-dessous, incomplet, a pour objectif d'obtenir les solutions à l'équation $|x| = m$ où $m \in \mathbb{R}$ est connu.

PseudoCode

```
Définir Solution(m) :
    Si m < 0 alors :
        Retourner «  ... solution  »
    Sinon   :
        Si ... alors :
            Retourner 0
        Sinon :
            a ← ...
            b ← ...
            Retourner a et b
        Fin Si
    Fin Si
```

1▶ Recopier et compléter l'algorithme.

2▶ a. Programmer cet algorithme en Python sur votre calculatrice ou ordinateur.

b. Tester cet algorithme avec $k = 2$, $k = 0$ et $k = -10$.

Exercice 1.11

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{7}x^2 - \sqrt{7}x + 3$. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de chacune d'elles.

Exercice 1.12

Dans chacun des cas, factoriser le polynôme en utilisant une identité remarquable ou une racine évidente.

1▶ $P(x) = -2x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{4}{5}$

2▶ $Q(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$

3▶ $R(x) = 2x + 2x^2 - 4$

Exercice 1.13

Pour chacune des fonctions Q et R suivantes définies sur $\mathbb{R}$, étudier ses variations et tracer sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1▶ $Q(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$.

2▶ $R(x) = 2x^2 + 2x - 4$.

Exercice 1.14

Un terrain est modélisé par un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ m et $BC = 7$ m. Un paysagiste souhaite végétaliser les coins en minimisant l'aire restante, qui sera pavée. Pour cela, on considère les points M, N, P et Q appartenant aux côtés respectifs $[AB], [BC], [CD], [DA]$ du rectangle tels que $AM = BN =$

$CP = DQ$. On note x la longueur AM (en m) et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de $MNPQ$ (en m^2) correspondant à l'aire pavée. ($\mathcal{A}$ est donc une fonction de la variable x.)

1► Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$?

2► Démontrer que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 11x + 28$.

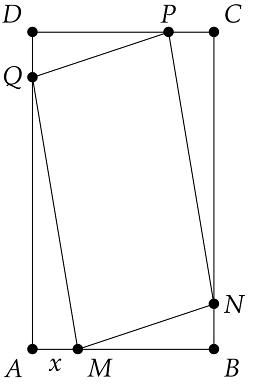
3► Peut-on placer M de telle sorte que :

a. $MNPQ$ ait une aire de $19\,\text{m}^2$ exactement ?

b. $MNPQ$ ait une aire inférieure à $19\ \text{m}^2$?

4► Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$.

5► Quelle est l'aire minimale de $MNPQ$ cherchée par le paysagiste ?



6 Tâche à prise d'initiative

Exercice 1.15

Un batelier descend une rivière de 210 km en plusieurs jours, à vitesse constante ; il la remonte ensuite, à vitesse constante aussi, et met un jour de plus, car chaque jour, il fait 7 km de moins qu'en descendant.

Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?

Aide n°1 :

Aide n°2 :

2 Produit scalaire

1 Prérequis et rappels

Le point histoire

Le travail sur la formalisation des vecteurs tels qu'on les connaît aujourd'hui a été initié au XIXe siècle par plusieurs mathématiciens de nationalités différentes. En Allemagne, Bernard Bolzano (1781-1848) publie une série d'ouvrages, dont les premiers sont *Considérations sur quelques sujets de géométrie élémentaire* et *Contributions à une présentation plus raisonnée des mathématiques* et dont l'objectif est de construire rigoureusement les mathématiques, à commencer par la géométrie.

Le travail initié par Bolzano sera repris et poursuivi par Michel Chasles (1773-1881).

La notion de vecteur moderne, telle qu'elle est enseignée dans les études supérieures de nos jours, est due au mathématicien italien Giusto Bellavitis (1803-1880). Professeur à l'université de Padoue en Italie, ce dernier travailla entre 1835 et 1837 sur l'algébrisation de la géométrie, et en particulier sur ce qu'il appelle l'équipollence. Il désigne alors par « lignes équipollentes » nos vecteurs actuels.

1.1 Vecteurs

Rappel

- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même **direction**.
- Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB), avec A et B deux points distincts, il y a deux **sens** de parcours dans cette direction : soit de A vers B, soit de B vers A.

Rappel

Un vecteur représente un déplacement pouvant être ramené à un mouvement rectiligne, appelé **translation**. Il est entièrement caractérisé par trois données :

- sa **direction** (parallèlement à quelle droite a lieu le déplacement ?)
- son **sens** (dans quel sens sur cette droite ?)
- sa **norme** (de quelle distance est ce déplacement ?)

Propriété

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Notation

Un vecteur est noté avec une flèche surmontant :

- soit une lettre minuscule générique (souvent $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$)
- soit un de ses représentants, nommé à l'aide d'un point et de son image par la translation représentée par ce vecteur ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA} \dots$).

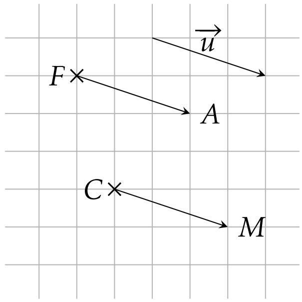
Remarque

Les quatre affirmations suivantes sont totalement équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
- $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu
- $AB\boldsymbol{D}C$ est un parallélogramme (Attention à l'ordre des lettres !)

Représentation graphique

Sur la figure ci-contre, le quadrillage n'est dessiné que par commodité de lecture.
Les « flèches » sont portées par des droites parallèles, elles indiquent le même sens sur chacune de ces droites parallèles, et elles ont la même longueur. Elles sont donc trois représentations du même vecteur. On peut nommer ce vecteur $\overrightarrow{u}$.
A étant l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, tout comme M est l'image de C, on dit que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{CM}$ et la flèche dont les extrémités ne sont pas nommées sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$. On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CM}$.



1.2 Coordonnées de vecteurs

Dans cette partie, on munit le plan d'un repère orthogonal.

Les coordonnées d'un vecteur traduisent « numériquement » la translation qui lui correspond selon sa composante horizontale (abscisse) et sa composante verticale (ordonnée).

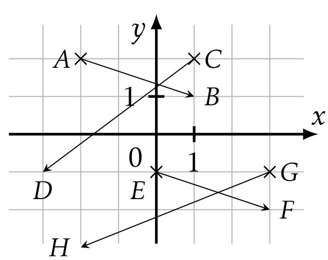
Notation

Dans ce cours, on privilégiera la notation des coordonnées en colonnes pour les vecteurs, par opposition à la notation en ligne que l'on réservera aux points.

Exo minute 2.A

1► Par lecture graphique, quelles sont les coordonnées de chacun des vecteurs représentés ci-contre ?

2► En déduire deux représentants du même vecteur. Comment les reconnaître ?



Corrigé de l'exo minute 2.A

1► On a $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-1}$ car le vecteur « avance de 3 et descend de 1 (autrement dit, il monte de -1) ». De même, on a $\overrightarrow{CD}\binom{-4}{-3}$, $\overrightarrow{EF}\binom{3}{-1}$ et $\overrightarrow{GH}\binom{-5}{-2}$.

2► On en déduit que les deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées sont égaux car ils représentent la même translation. Il s'agit de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$.

Rappel

Un vecteur dont un représentant a pour origine un point $A(x_A;y_A)$ et pour extrémité un point $B(x_B;y_B)$ a pour coordonnées $\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.

À retenir

« coordonnées du vecteur = coordonnées de l'extrémité moins coordonnées de l'origine ».

Rappel

Dans un repère orthonormé on considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Dans ce repère, la **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Démonstration

laissée en exercice. Elle utilise le théorème de Pythagore. □

Exo minute 2.B

Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées et la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1► avec $A(2;7)$ et $B(-2,2)$;

2► avec $A(-3;6)$ et $B(-10;200)$

Corrigé de l'exo minute 2.B

1► $\overrightarrow{AB}\binom{-2-2}{2-7}$ soit $\overrightarrow{AB}\binom{-4}{-5}$.
Ainsi, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2-2)^2+(2-7)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$.

2► $\overrightarrow{AB}\binom{-10-(-3)}{200-6}$ soit $\overrightarrow{AB}\binom{-7}{194}$.
Ainsi, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-10-(-3))^2+(200-6)^2} = \sqrt{(-7)^2+(194)^2} = \sqrt{37685}$.

Exercice 2.1

1► On donne ci-dessous un fonction Python incomplète prenant en argument les coordonnées de deux points A et B et retournant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Code Python

```
# Fonction pour calculer les coordonnées d'un vecteur
def coord(xA,yA,xB,yB):
    abs=xB-xA
    ord= ...... - ......
    return (...... , ......)
```

Compléter ce code et le tester sur votre calculatrice ou votre ordinateur sur les vecteurs de l'exo minute précédent.

2► Sur le même modèle, créer une fonction Python qui prend en argument les coordonnées de deux points A et B et retourne la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La tester sur les vecteurs de l'exo minute précédent.

1.3 Projeté orthogonal

Rappel

Dans un triangle rectangle on peut déterminer le cosinus d'un angle aigu en divisant la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle.

Rappel

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point H de (d) tel que $(MH)\perp(d)$.

Propriété

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point de (d) le plus proche de M.

Démonstration

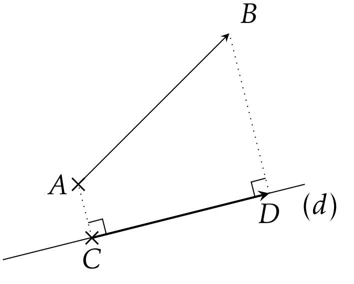
En effet, n'importe quel autre point K de la droite (d) formerait avec M et H un triangle rectangle en H dont MK serait l'hypoténuse et alors on aurait bien $MK > MH$. $\square$

Définition

Le projeté orthogonal d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur une droite (d) est le vecteur dont l'origine est le projeté orthogonal de A et l'extrémité est le projeté orthogonal de B.

Exemple

Sur cette figure, C est le projeté orthogonal de A sur (d), D est le projeté orthogonal de B sur (d).
Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est donc le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite (d).

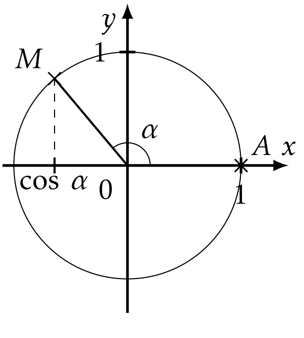


1.4 À propos des angles

Jusqu'à présent, le cosinus d'un angle n'a été défini que pour des angles aigus, dans un triangle rectangle. Pour autant, on peut définir le cosinus d'angles obtus, droit ou plat avec la définition suivante :

Définition

On considère, dans un repère, un cercle de rayon 1 centré à l'origine O (on appelle ce cercle très particulier **le cercle trigonométrique**), et le rayon de ce cercle qui va de l'origine vers le point A de coordonnées $(0;1)$.
Le **cosinus d'un angle α** est l'abscisse du point M de ce cercle formant avec le centre O et le rayon $[OA]$ du cercle trigonométrique l'angle α.



Remarques

Le cosinus peut valoir 0 (si l'angle est droit) ou être négatif (si l'angle est obtus)