Guillaume Chèze

Histoires de partages et de MATHÉMATIQUES

ellipses

Chapitre 1

Partager un champ

Un problème ancien

Au commencement était le partage

Les premières écritures se trouvent sur des tablettes d'argile remontant à 3500 avant J.-C. Celles-ci ont été réalisées en Mésopotamie (Irak actuel). Parmi ces tablettes certaines présentent les premiers documents mathématiques de l'Histoire. Par exemple, une tablette datant de 3350 avant J.-C. environ contient les dimensions d'un territoire.
Quelques siècles plus tard (entre 2900 et 2340 avant notre ère), des tables donnent l'aire de carrés ou de rectangles en fonction de leurs dimensions. La mesure de l'étendue d'un territoire a donc été l'une des premières préocupations mathématiques.

Une autre des plus anciennes tablettes mathématiques connues provient de la citée d'Uruk et date de 2340-2200 avant notre ère. Cette tablette ne donne pas simplement les mesures d'un champ, elle semble correspondre à un problème de partage. Ici, il faut découper un champ ayant la forme d'un trapèze en deux parties de même aire. La figure page suivante montre la situation géométrique considérée.

De nombreuses autres tablettes datant de 2000-1600 avant J.-C. correspondent à des problèmes de partage de champs en plusieurs parties de même aire ou de même forme. Ces problèmes de partage de champs pouvaient provenir de situations d'héritage ou bien être liés aux cadastres. Par exemple, une tablette[1] porte sur le partage d'un champ entre deux

1. Cette tablette porte le numéro d'inventaire VAT 7621. Une présentation de celle-ci par une spécialiste du sujet ainsi que des mathématiques utilisées dans les problèmes de

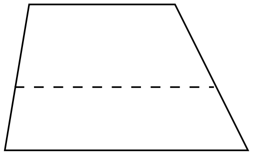

FIGURE 1.1 – Partage d'un trapèze en deux parties de même aire

familles de neufs enfants. Ce champ a la forme d'un trapèze et celui-ci doit être partagé en deux bandes de même aire. Ensuite, chaque bande est partagée entre les neufs enfants de chacune des familles.

Il semble donc que le problème du partage d'un trapèze en deux parties de même aire soit apparu naturellement lors de problèmes d'héritage. Toutefois, la situation du partage en deux d'un trapèze n'est pas apparue qu'à cette occasion dans l'Antiquité. En effet, il a été mis en évidence qu'une procédure de calcul pour partager un trapèze en deux parties de même aire était utilisée entre 400 et 50 avant J.-C. par les astronomes de Babylone. Le problème étudié par ces astronomes était le suivant : La vitesse de déplacement de Jupiter vue de la Terre varie chaque jour. Après 60 jours, Jupiter se trouve à une certaine position dans le ciel et aura parcouru une certaine distance. La question est alors de savoir au bout de combien de temps Jupiter aura parcouru la moitié de cette distance. Comme la vitesse varie chaque jour, la réponse ne correspond pas à la moitié du temps. En 2016, Mathieu Ossendrijver a montré que certaines tablettes décrivaient la solution de ce problème[2]. Il a expliqué comment les astronomes babyloniens ont ramené ce problème à un problème de partage d'un trapèze en deux parties d'aire égale. Les détails pour comprendre la relation entre le partage du trapèze et le problème de Jupiter sont donnés en Annexe, voir page 213.

Les problèmes de partage d'un trapèze ou d'autres figures géométriques sont donc ancrés dans la réalité et vont se complexifier avec le temps. Bien plus tard, au Xe siècle, le mathématicien Al-Karaji, donnera une méthode pour partager un champ rectangulaire entre trois personnes tout en laissant libre une voie d'accès aux trois terrains et en imposant la proportion de surface obtenue par chacune des personnes[3].

partage des champs en Mésopotamie se trouve dans (Proust, 2022).

2. (Ossendrijver, 2016)
3. (Moyon, 2016)

Il faut cependant noter que la difficulté d'un problème mathématique n'apparaît pas toujours à première vue. Par exemple, nous venons de voir qu'un des premiers problèmes mathématiques connus est le partage d'un trapèze en deux parties de même aire. Le problème suivant est dans le même esprit :
Comment partager un carré en sept ou neufs triangles de même aire ?

Ce problème est donc d'apparence très classique et nous nous attendons à pouvoir le résoudre à l'aide de mathématiques élémentaires. Il n'en est rien ! L'histoire suivante va nous montrer que ce problème est en réalité redoutable.

En 1965, Fred Richman, un mathématicien de l'université de Las Cruces au Nouveau Mexique, cherche un exercice de géométrie pour son examen de master. Il remarque que le partage d'un carré en un nombre pair de triangles de même aire s'obtient très facilement.
La figure suivante nous montre comment faire lorsque nous avons six triangles.

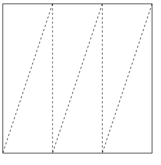

FIGURE 1.2 – Partage d'un carré en 6 triangles de même aire

Lorsque Richman cherche à partager le carré avec un nombre impair de triangles, il ne voit pas comment procéder. Il arrive à démontrer qu'un partage avec trois ou cinq triangles de même aire est impossible mais les autres situations restent mystérieuses. Quoiqu'il en soit, la parité[4] du nombre de triangles joue un rôle.
Richman choisit alors de ne pas inclure d'exercices sur ce thème dans son examen mais il en parle à son collègue John Thomas. Celui-ci raconte[5] que toutes les personnes (y compris lui même) à qui on posait la question : « Est-ce qu'un carré peut-être partagé en un nombre impair de triangles de même aire ? » avaient la même réaction. Tout le monde pensait que cette question avait déjà été étudiée et que la réponse était connue. Certains pensaient même avoir déjà vu ce problème quelque part mais ne se rappelaient plus où...

4. Ici, la parité désigne le fait d'être pair ou impair.
5. (Stein et Szabo, 2014)

Thomas passa plusieurs mois à réfléchir à cette question et trouva une réponse partielle.
Il démontra qu'il est impossible de partager un carré avec un nombre impair de triangles de même aire lorsque les coordonnées des sommets des triangles sont d'un certain type. Il souhaite alors faire publier ce résultat dans une revue de mathématiques : *Mathematics Magazine*. Cependant, la personne en charge d'examiner l'article pense que ce problème doit, en réalité, être très facile et que la réponse doit être déjà connue. Il est alors convenu de poser la question dans une autre revue, l'*American Mathematical Monthly*, et de voir si une réponse est apportée. La question apparait alors sous la forme du problème 5479 dans le numéro de mars 1967 de l'*American Mathematical Monthly*.
Personne ne résolut le problème.
Finalement, l'article de Thomas fut publié dans *Mathematics Magazine* trois ans après que celui-ci a proposé sa solution[6].

En 1970, Paul Monsky s'appuya sur la preuve de Thomas et résolut définitivement le problème en supprimant la condition technique sur les coordonnées des sommets des triangles[7]. Le théorème de Monsky permet donc de répondre simplement à la question posée. La réponse est : *Non.*
Ici, « répondre simplement » signifie que la réponse est simple à exprimer : *On ne peut jamais partager un carré en un nombre impair de triangles de même aire*. Il n'y a pas de cas particuliers à regarder, ni de conditions sur les triangles à ajouter.
Grâce à Monsky nous avons donc une réponse simple à exprimer. Cela ne signifie pas que la démonstration qu'il propose est simple. C'est presque le contraire : la démonstration est finalement assez élaborée pour un problème qui semble être étudié depuis l'antiquité. La démonstration est surprenante car elle fait intervenir des outils mathématiques assez sophistiqués (les valuations 2-adiques d'un nombre réel) et inattendus dans ce genre de problèmes.

Le livre *Proofs from the Book*, traduit en français par *Raisonnements divins*, est un recueil de preuves magnifiques[8]. L'idée de ce livre provient du fait que le mathématicien Paul Erdős (1913-1996) disait qu'il existe un livre, *le* Livre, dans lequel Dieu consigne les preuves parfaites. Il disait aussi qu'il n'est pas nécessaire de croire en Dieu, mais qu'en tant que mathéma-

6. (Thomas, 1968)
7. (Monsky, 1970)
8. (Aigner et Ziegler, 2018), pour la version en français voir (Aigner et Ziegler, 2013)

ticien, il est nécessaire de croire au Livre. Les deux mathématiciens Martin Aigner et Günter Ziegler ont alors essayé de faire une approximation de ce que pouvait être le Livre. Ils ont donc proposé un livre rassemblant des théorèmes avec des preuves particulièrement élégantes. Ce livre fut un véritable succès. En 2018, la version anglaise en était à sa sixième édition. La preuve de Monsky fit son entrée dans « le Livre » à sa quatrième édition.

Une fois la question de Richman résolue, d'autres apparaissent automatiquement.

- Que se passe-t-il si à la place d'un carré nous considérons un polygone régulier avec 5 côtés, ou avec 6 côtés ou avec n côtés ?
La réponse[9] est la suivante : Un partage d'un polygone régulier en triangles de même aire existe uniquement lorsque le nombre de triangles est un multiple du nombre de côtés du polygone. Donc si nous considérons un polygone à 5 côtés, nous pouvons le partager en 10, ou 15, ou 20 triangles de même aire, mais cela est impossible avec 6 triangles.

- Que se passe-t-il avec un quadrilatère quelconque ?
On peut montrer[10] que la plupart des quadrilatères ne peuvent jamais être partagés en triangles de même aire. Autrement, si nous prenons quatre points au hasard sur une feuille de papier et que nous traçons le quadrilatère correspondant alors, nous ne pourrons pas le partager en triangles de même aire. Nous ne le pourrons pas quel que soit le nombre de triangles, qu'il soit pair ou impair.

- Lorsque nous découpons un carré en un nombre impair de triangles, quelle est le plus petit écart possible entre l'aire du plus grand triangle et l'aire du plus petit ?
Comme tous les triangles ne peuvent pas avoir la même aire, cet écart est donc un nombre strictement positif. Toutefois, il est possible de montrer qu'il existe un partage pour lequel cet écart est très petit lorsque nous prenons un grand nombre de triangles. Schulze[11] a même montré en 2011 que lorsque nous prenons n triangles cet écart est inférieur à quelque chose dont l'ordre de grandeur est $1/n^3$. Cela signifie que si nous partageons un carré de côté 1 en 10 triangles alors il existe un partage pour lequel l'écart entre l'aire du plus grand et du plus petit triangle soit inférieur à $1/1000$.

9. (Kasimatis, 1989)
10. (Kasimatis et Stein, 1990)
11. (Schulze, 2011)

En 2020, un encadrement pour le plus petit écart a été donné[12]. Ce résultat montre en particulier que le plus petit écart est obligatoirement plus grand qu'un certain nombre donné par une formule.

Ainsi, partager une figure en plusieurs parties de même aire est un problème qui remonte aux origines des mathématiques en Mésopotamie et qui arrive encore de nos jours à occuper les mathématiciens.

Le problème du Nil

L'Égypte antique a elle aussi laissé des traces écrites de son activité mathématique, mais c'est par l'intermédiaire d'Hérodote, historien et géographe grec qui vécut entre -480 et -425, que nous connaissons un des problèmes de partage de cette civilisation.
En effet, Hérodote attribue l'origine de la géométrie aux crues du Nil. Il raconte que le roi Sésostris fit le partage des terres en attribuant à chaque égyptien une portion égale de terre. Les égyptiens devaient alors payer au roi une redevance annuelle. Si une crue du Nil enlevait une partie exploitable d'un champ alors le paysan concerné allait présenter son problème et le roi envoyait des arpenteurs afin de ne faire payer la redevance qu'en proportion de ce qui restait[13].

Le partage des terres suite aux crues du Nil a inspiré à nouveau les mathématiciens des années plus tard. En 1936, le statisticien britannique Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) pose comme challenge à la communauté mathématique de son époque le problème suivant[14] :
La fertilité de la terre dépend des crues du Nil qui déposent le limon noir. Connaissant la hauteur de la crue, nous pouvons en déduire la portion des terres qui a été fertilisée. Toutefois, les différentes parcelles ne sont pas toutes fertilisées de la même manière. La question posée est alors la suivante : Peut-on effectuer un découpage où chaque paysan reçoit une ou plusieurs parcelles afin que chacun ait la même proportion de terre fertilisée quelle que soit la hauteur de la crue ?

En réalité, avec le problème des crues du Nil, Fisher présente une version simplifiée d'un problème qu'il considère. Dans la formulation mathématique générale plusieurs paramètres interviennent. Nous pouvons imaginer que nous voulons mesurer la qualité d'un champ et que celle-ci dépende de la

12. (Labbé *et al.*, 2020)
13. (Hérodote, 440) §109, page 137.
14. (Fisher, 1936)

hauteur de la crue, mais aussi de son exposition aux intempéries (pluie, vents). L'objectif est alors de découper le territoire en régions similaires. C'est-à-dire, en région de qualité identique quelle que soit la hauteur de la crue, les précipitations reçues, etc.
Il a été démontré en 1938 par William Feller (1906-1970) qu'il existe des situations où un tel partage est impossible[15]. Ce résultat n'est pas évident à prouver car il ne suffit pas de dire qu'un partage ne peut pas satisfaire un grand nombre de conditions en même temps (ici, les conditions sont les hauteurs de crues et les différentes quantités de précipations possibles). En effet, en 1946 J. Neyman a démontré[16] que si nous considérons un nombre fini de conditions (même si ce nombre est très grand) alors le partage en régions similaires existe. Le résultat de Feller s'appuie sur le fait que les paramètres (hauteurs de crues, etc.) peuvent prendre une infinité de valeurs différentes.

Périmètre et aire

Une erreur pleine d'avenir

Nous avons vu que des problèmes de partage avaient fait émerger des problèmes de géométrie en Mésopotamie et en Égypte. Ensuite, en Grèce, vers 300 avant J.-C. la géométrie a été formalisée par Euclide dans son traité *Les Éléments*. Ce traité est le premier en son genre car il pose des définitions et donne des démonstrations des théorèmes. Ce traité a connu un immense succés, il a été traduit et édité au moins un millier de fois. Pendant des siècles, il a appartenu au cursus universitaire standard. D'après C. Boyer (auteur de *History of Mathematics*), c'est le manuel le plus influent de tous les temps[17]...

Le philosophe grec Proclus (412-485) a commenté les *Éléments* d'Euclide. Dans ses commentaires[18], il fait remarquer qu'il ne faut pas comparer la taille de deux villes en mesurant la longueur des remparts. En effet, cette mesure nous donne le périmètre de la ville, alors que pour mesurer son étendue il faut considérer son aire.

15. (Feller, 1938)
16. (Neyman, 1946)
17. (Boyer et Merzbach, 2011)
18. (Proclus, 1992, p. 403)

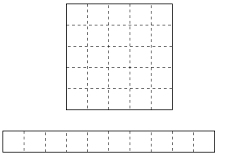

FIGURE 1.3 – Avoir le plus grand périmètre ne signifie pas avoir la plus grande aire.

Sur la figure ci-dessus le carré a un côté de longueur 5 unités. Donc son périmètre est de 20 unités et son aire est de 25 carreaux. Le rectangle a une longueur de 10 unités et une largeur de 1 unité. Donc son périmètre est de 22 unités et son aire est de 10 carreaux.
Le rectangle a donc un périmètre plus grand que le carré, mais son aire est plus petite que celle du carré. Cet exemple simple illustre bien le fait que nous ne pouvons pas utiliser le périmètre de deux figures pour comparer leurs surfaces.

La remarque de Proclus n'est pas anodine car la pratique qu'il dénonce existait. On mesurait la taille d'une ville en comptant le nombre de pas nécessaires pour en faire le tour.
Par exemple, dans sa *Géographie*, Strabon (-60 av. J.-C., -20 av. J.-C) présente la ville de Carthage de la manière suivante : « *Carthage est bâtie sur une presqu'île qui décrit une circonférence de 360 stades.* »
Pour la ville de Paraetonium, il écrit « *Il y a là une ville et un grand port de 40 stades de tour environ.* »

Proclus rapporte que la confusion entre aire et périmètre pouvait aussi se produire lorsque deux individus souhaitaient se partager un champ et où une des parcelles avaient un périmètre plus petit que l'autre. Celui qui se proposait pour recevoir cette part obtenait alors une réputation de grande honnêteté. Toutefois, il était tout à fait possible que la proposition soit intéressée. Le champ avec le plus petit périmètre pouvait avoir une aire plus grande et donc permettre d'obtenir des récoltes en plus grande quantité.

Proclus nous met donc en garde : c'est une erreur de confondre aire et périmètre. Toutefois, lorsqu'un cultivateur fait le tour de son champ, celui-ci en acquiert une bonne connaissance. L'intuition nous dit qu'en faisant le tour d'un champ nous en connaissons les limites donc nous devrions être capable de dire quelque chose sur la surface que nous venons d'entourer. Est ce qu'il n'y a pas quelque chose de valable à tirer de cette intuition ?

Par exemple, si le champ est triangulaire alors en faisant le tour du champ nous pouvons mesurer la longueur de ses trois côtés. Au premier siècle après J.-C., le mathématicien Héron d'Alexandrie a donné une formule permettant d'obtenir l'aire d'un triangle à partir de la longueur des trois côtés[19]. De même, si le champ est rectangulaire alors nous pouvons mesurer la longueur et la largeur pour ensuite calculer l'aire de celui-ci. Sur ces cas simples nous constatons que la connaissance du bord du champ permet de connaître l'aire de celui-ci. Peut-on en faire autant dans des cas plus compliqués où le bord du champ n'est pas constitué de segments rectiligne ?

Il a fallu plus de mille ans pour avoir un outil rendant cette intuition correcte : Au XIXe siècle le planimètre est inventé !

FIGURE 1.4 – Planimètre d'Amsler

Le planimètre est un instrument permettant d'obtenir la surface d'une région. Il existe différentes sortes de planimètres. Le planimètre d'Amsler (1823-1912), fut inventé en 1854 et connut un grand succès. Voici comment il fonctionne :
Imaginer le plan d'une parcelle. Cette parcelle n'a pas nécessairement une forme géométrique simple. Sa limite est peut être une courbe et non pas une succession de segments. Le planimètre d'Amsler, dit « planimètre polaire », est un instrument qui permet alors de mesurer la surface de cette parcelle. Ce mécanisme est constitué de deux bras articulés et d'une roulette. Une extrémité est fixée. L'autre est libre de se déplacer et possède une pointe. L'utilisation est très facile, il suffit de prendre la pointe et de suivre avec celle-ci sur le plan le contour de la parcelle. La roulette permet de mesurer la surface se trouvant à l'intérieur du contour suivi. De nos jours, il est facile de construire un planimètre. On trouve sur internet des plans pour en fabriquer en Lego[20].

19. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où a, b, c sont les longueurs des côtés et p est le demi-périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$.
20. (Nico71, 2013)

Ce mécanisme ingénieux est une application de la *formule de Green* (1793-1831). Cette formule[21] est énoncée dans un cadre qui permet de donner une démonstration à l'intuition : « lorsque nous faisons le tour d'une parcelle nous pouvons calculer son aire ».

L'auteur de cette formule, George Green, était quasiment autodidacte. Il n'est allé à l'école qu'entre ses huit et neuf ans. Il a publié en 1828, à l'âge de 35 ans, son *Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme* dans lequel on trouve des idées importantes dont la formule qui porte aujourd'hui son nom. Dans la préface, il explique qu'il aimerait donner une présentation historique du sujet qu'il va traiter mais que cela lui est impossible car ses sources d'informations sont limitées.

L'astuce de Didon

Nous avons rencontré plus haut la ville de Carthage et sa présentation par le géographe Strabon. Revenons à présent sur l'histoire[22] racontant l'origine de cette ville. Cela va nous permettre de croiser la reine Didon mais aussi l'inégalité isopérimétrique dont nous aurons besoin dans le chapitre 6 lorsque nous devrons découper un territoire en circonscriptions.

D'après la légende, en 814 av. J.-C., la reine Didon fonda la citée de Carthage sur les côtes de l'actuelle Tunisie. Elle aurait demandé au roi des lieux de lui offir un terrain afin qu'elle puisse s'y installer. Le roi lui proposa un morceau de son territoire *pouvant être contenu dans la peau d'un bœuf.* Didon aurait alors fait découper la peau en une longue lanière. Ensuite, elle disposa cette lanière en demi-cercle en plaçant les deux extrémités sur le rivage. Le rivage étant rectiligne à cet endroit, elle obtint une parcelle ayant la forme d'un demi-disque. Avec les contraintes imposées à Didon, le territoire obtenu est celui possédant la plus grande aire. Toute l'astuce de Didon a donc été de savoir jouer sur les mots pour transformer le problème qui lui était posé en un problème d'*isopérimétrie* : parmi toutes les figures qui ont le même périmètre, trouver la forme ayant la plus grande aire.

21. Pour le plaisir des yeux : $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C -ydx + xdy$.

22. Cette histoire était déjà contée par Virgile dans l'Énéide, Chant I (335-368).

La reine Didon se trouvant en bord de mer, l'utilisation du rivage comme frontière naturelle de son futur territoire était très judicieux.
Qu'aurait-il fallu faire si le même problème s'était posé très loin du rivage en plein milieu des terres ?
Cette question se pose lorsqu'une ville fortifiée est construite : quitte à fabriquer des remparts ou des fossés autant que la ville se trouvant à l'intérieur soit la plus grande possible. Mathématiquement, la question devient : quelle est la forme qui permet d'avoir la plus grande aire pour un périmètre donné ?

La réponse à cette question de géométrie est là encore assez intuitive : Il faut tracer un cercle.

On peut supposer que les bâtisseurs de la ville de Bram dans l'Aude avaient eux aussi cette intuition.

FIGURE 1.5 – Village de Bram vu du ciel[23]

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que d'intuition. Comment être sûr que le cercle est la meilleure solution au problème ?
En fixant la valeur du périmètre et en utilisant les formules de l'aire d'un triangle, d'un carré, ou d'autres formes géométriques nous pouvons constater que le cercle possède une plus grande aire que ces figures. Toutefois, il existe peut être une forme à laquelle nous n'avons pas pensé et qui aura une aire plus grande que celle du cercle.

Nous avons donc besoin d'une démonstration.
Les premières résultats remontent au IIe siècle avant J.-C. et sont l'œuvre de Zénodore. Nous ne savons pas grand chose de ce mathématicien. Son

23. Détail de la photo, https ://commons.wikimedia.org/wiki/File :Bram_drone_3.jpg, source APB11, consulté le 20/01/2025.

traité *Sur les figures isomorphes* a été perdu et nous ne le connaissons que par l'intermédiaire d'autres œuvres le citant. Zénodore a montré par exemple que le carré est la figure avec quatre côtés qui a la plus grande aire possible lorsque le périmètre est fixé. Plus généralement, il a montré que le polygone régulier[24] est le polygone qui a la plus grande aire parmi tous les polygones qui ont le même périmètre et le même nombre de côtés. Zénodore a aussi prouvé que le cercle a une aire plus grande que n'importe quel polygone de même périmètre.

Ces résultats sont intéressants mais ils ne comparent que le cercle et les polygones. Il existe peut être une figure dont le bord est une courbe bizarre qui a le même périmètre que le cercle mais qui possède une aire plus grande. Zénodore ne nous dit rien à ce propos. Il faudra attendre plus d'un millier d'années pour avoir une réponse complète au problème.

En 1838, le mathématicien suisse Jakob Steiner (1796-1863) développe une idée appelée aujourd'hui, principe de symétrisation de Steiner. Il montre alors que pour un périmètre fixé, s'il existe une figure qui possède une aire maximale alors cette figure doit être le cercle[25].

La preuve proposée par Steiner procède de la manière suivante : Considérons une figure et une ficelle posée sur son contour. La longueur de la ficelle correspond donc au périmètre de la figure. Si la figure n'est pas un cercle alors nous pouvons déplacer la ficelle, sans la casser, afin qu'elle délimite une figure d'aire plus grande.

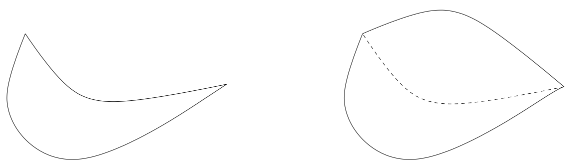

FIGURE 1.6 – Principe de symétrisation de Steiner

Comme la ficelle n'a pas été cassée, le périmètre reste le même alors que l'aire augmente. Donc si une figure n'est pas un cercle alors nous pouvons changer sa forme pour obtenir une nouvelle figure avec le même périmètre mais avec une aire plus grande. Par conséquent, s'il existe une figure avec

24. Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles sont égaux.
25. (Steiner, 1838)

une aire maximale alors il n'y a qu'une seule solution possible, ce doit être le cercle. En effet, pour toutes les autres figures nous pouvons en construire une nouvelle qui aura une aire plus grande.
Steiner a donné en tout cinq démonstrations du même résultat[26]. Malheureusement, celui-ci a un défaut. Il suppose qu'il existe une figure avec une aire maximale. Cela semble évident mais cela reste à démontrer. L'approche de Steiner est donc incomplète. En annexe[27], nous donnons la critique qu'en a fait Oskar Perron en 1913. Cette critique met en évidence la lacune se trouvant dans la preuve de Steiner.

Une preuve a été obtenue en 1879 par Karl Weierstrass (1815-1897) en utilisant ce que nous appelons le calcul variationnel. Pour faire très simple, l'approche de Weierstrass est la suivante : Il pose le problème sous la forme d'une équation. Dans cette équation les inconnues ne sont pas des nombres mais des fonctions. Ensuite, il montre que cette équation a une solution qui correspond au cercle. Weierstrass ne publia jamais ce résultat mais on le trouve dans ses œuvres complètes[28].

Finalement, le résultat obtenu peut être résumé de la manière suivante :
Si P désigne le périmètre d'une figure et A son aire alors nous avons :
$$P \times P \geq 4\pi A.$$
De plus, l'égalité est obtenue uniquement lorsque la figure est un cercle.

L'inégalité montre que l'aire de la figure doit être inférieure à une quantité qui dépend du périmètre. Donc, lorsque le périmètre est fixé, l'aire ne peut pas devenir trop grande.
De plus, le nombre $4\pi A$ doit être toujours plus petit ou égal à $P \times P$, donc l'aire est maximale lorsque $4\pi A$ est égal à $P \times P$.
Un petit calcul montre que cela se produit effectivement lorsque nous avons un cercle[29].

Le problème isopérimétrique semble donc résolu. Cependant, dès l'antiquité, le problème similaire avec les volumes et les surfaces était posé. Une version du problème existait donc aussi dans l'espace : Quelle forme géométrique contient le plus grand volume lorsque la surface de l'enveloppe extérieure est fixée ?

26. (Steiner, 1842a), (Steiner, 1842b)
27. voir page 215
28. (Weierstrass, 1927, p. 254-264), (Blåsjö, 2005)
29. Pour un cercle de rayon r, le périmètre est $P = 2\pi r$, et l'aire est $A = \pi r^2$. Donc $P \times P = 4\pi^2 r^2 = 4\pi \times \pi r^2 = 4\pi A$.

Ici, le problème devrait s'appeler le problème *isosurfacique* car on cherche parmi toutes les formes qui ont la même surface celle qui donne le plus grand volume. Toutefois, ce problème est encore appelé problème isopérimétrique.
Une fois de plus, la réponse est simple à énoncer : La forme recherchée est la sphère.

Ce résultat permet d'expliquer certains phénomènes physiques. Par exemple, pourquoi les bulles de savon sont des sphères.
En effet, la modélisation physique de l'étude d'une bulle de savon nous amène à chercher la forme qui demande le moins d'énergie pour se maintenir. Cette contrainte correspond à avoir une surface extérieure minimale pour un volume donné. Or, il est possible de montrer que chercher une forme qui a une surface minimale pour un volume donné revient à chercher une forme qui a un volume maximal pour une surface donnée. On retombe donc sur le problème isopérimétrique dans l'espace.

La forme d'une bulle de savon n'est qu'un exemple parmi tant d'autres. L'étude du problème isopérimétrique a de nombreuses conséquences en physique. Le problème isopérimétrique apparait aussi dans l'étude de la forme de certains cristaux. Il s'agit dans ce cas du problème « isopérimétrique anisotrope ». Ce problème identifié en 1901 est plus difficile que le problème isopérimétrique classique. Voici pourquoi :
L'étude se concentre sur les polyèdres. Un polyèdre est un solide de l'espace dont chacune des faces est un polygone. Un polyèdre a donc des sommets, des arêtes et des faces. Par exemple, un cube est un polyèdre. On cherche alors les configurations qui pour un volume donné ont une surface minimale. Dans le cas classique, la surface du polyèdre s'obtient en ajoutant la surface de chacune des faces. Ici, l'étude physique des configurations possibles des cristaux montre que la configuration retenue par la nature minimise une certaine énergie. De plus cette énergie se calcule en additionnant les surfaces de chaque face. La difficulté provient du fait que certaines faces doivent compter plus que d'autres. Une inégalité[30] pour ce cas a été donnée en 2010 par A. Figalli[31], F. Maggi et A. Pratelli.

30. (Figalli *et al.*, 2010)
31. Alessio Figalli est un mathématicien italien né en 1984. Il a reçu la médaille Fields en 2010. En mathématiques, les plus prestigieuses récompenses sont la médaille Fields et le prix Abel.

Finalement, la comparaison du périmètre d'une figure avec l'aire qu'elle délimite est un problème ancien. Ce problème a ses racines dans l'étude du partage d'un champ (partage en fonction du périmètre ou bien de l'aire de celui-ci) mais il nourrit encore les réflexions actuelles.

Un coupe, l'autre choisit.

Lorsque nous partageons un champ, nous devons prendre en considération son aire et non pas son périmètre. Cela permet d'avoir une mesure objective de l'étendue de celui-ci. C'est très pratique pour le cadastre et la récolte d'un impôt mais aussi lorsque deux héritiers reçoivent chacun la moitié d'un champ. Aucun sentiment d'injustice ne devrait apparaître entre les deux héritiers puisqu'ils obtiennent chacun la même étendue.
Toutefois, si une moitié du champ possède une terre fertile et l'autre n'est constituée que de cailloux alors le partage n'est plus réellement équitable. La jalousie est alors inévitable et des conflits vont naître.

La notion d'aire n'est donc pas toujours suffisante pour effectuer un partage juste. Il faut aussi prendre en considération l'avis, les préférences des personnes impliquées dans le partage. Cela signifie donc qu'il faut prendre en compte quelque chose de subjectif, car chacun va estimer à sa manière une parcelle d'un terrain. Certains privilégieront l'accés à un point d'eau, d'autres la fertilité du sol, etc. La prise en compte de ces préférences semble donc difficile à réaliser. En effet, il n'est pas toujours facile d'imaginer les goûts et les préférences des autres. Donc, intégrer ces éléments dans un calcul paraît être délicat. Pourtant, il est possible d'éviter les conflits lorsque deux personnes doivent se partager un champ. Voici comment le problème a été résolu il y a des milliers d'années :

Il y a fort longtemps deux bergers et leurs familles faisaient paître leurs troupeaux dans un champ. Cependant les troupeaux étaient si nombreux qu'ils ne pouvaient rester ensemble sur le même champ. Des disputes entre bergers commençaient à éclater. Voici alors ce que dit le premier berger au second :

« *Qu'il n'y ait point, je te prie, de dispute entre moi et toi, ni entre mes bergers et tes bergers ; car nous sommes frères. Tout le pays n'est-il pas devant toi ? Sépare-toi donc de moi : si tu vas à gauche, j'irai à droite ; si tu vas à droite, j'irai à gauche.* »

Cette histoire est racontée dans la Genèse (13 :5-9). Les deux bergers se nomment Abraham et Lot. Ainsi, afin d'éviter un conflit, Abraham décide de partager avec Lot un territoire. La question qui se pose alors est : Pourquoi cette méthode évite-t-elle les conflits ?

Tout d'abord, mettons nous à la place d'Abraham. Nous contemplons alors le territoire et nous pouvons tracer une ligne imaginaire qui découpe ce territoire en deux parties de même valeur. Ici, la valeur d'une partie ne correspond pas nécessairement à sa taille (son aire). Par exemple, un grand champ sans accès à une rivière ou à un point d'eau aura moins de valeur qu'un champ un peu plus petit mais avec un accès à un point d'eau.
Abraham partage alors le territoire en deux parties qui, pour lui, ont la même valeur. Ensuite, il propose à Lot de choisir une des deux parties. Donc, quel que soit le choix de Lot, Abaraham ne sera pas jaloux de ce dernier. En effet, Abraham n'aime pas une partie plus qu'une autre.
À présent mettons nous à la place de Lot. Celui-ci doit choisir entre deux parties du territoire. Il choisit celle qu'il préfère et ne sera donc pas jaloux de la partie gardée par Abraham.
Finalement, ce partage évite la jalousie.

Cette méthode est très simple et peut s'appliquer à deux convives désirant partager un gâteau de manière équitable. Le premier convive coupe le gâteau en deux parts qu'il estime être de même valeur et le second choisit la part qu'il préfère. De nos jours, cette méthode est appelé *Un coupe, l'autre choisit*.

Cette astuce est très classique. Elle apparait aussi dans la mythologie grecque. Dans la Théogonie d'Hésiode se trouve le récit du partage d'un bœuf entre Prométhée et Zeus. Prométhée est celui qui coupe et Zeus celui qui choisit. Cet épisode s'appelle *le partage à Mékôné*, Mékôné étant la ville dans laquelle se déroula le partage :
Prométhée avait préparé deux parts. Dans la première se trouvaient présentés de manière appétissante les os recouverts de gras. Dans la seconde, cachés sous la peau se trouvaient les meilleurs morceaux. Zeus voyant qu'une part était plus alléchante que l'autre fit remarquer que celles-ci étaient inégales. Ce à quoi Prométhée répondit « *Choisis entre ces deux portions celle que ton coeur préfère* ». Zeus choisit alors la première part, puis lorsqu'il comprit la ruse de Prométhée, il éclata de colère...

La méthode *Un coupe, l'autre choisit* remonte donc au temps mythologique. Nous remarquons de plus que dans l'histoire précédente celle-ci est parfaitement maitrisée par Prométhée. En effet, lorsque l'on utilise cette méthode sans tricher celui qui coupe n'a aucun avantage. Il recevra une part qu'il estime être d'une valeur égale à la moitié de ce qui est partagé. Pour celui qui choisit la situation est différente car il doit choisir entre deux portions. Il est possible qu'une portion soit plus avantageuse qu'une autre pour le deuxième convive. Dans le cas du partage à Mékôné, lorsque Zeus regarde les deux portions celles-ci n'ont pas la même valeur et prend celle qui lui semble la plus avantageuse. Grâce à sa ruse Prométhée arrive donc à utiliser à son avantage le fait d'être à la découpe afin de garder pour lui les meilleurs morceaux de viande.
Toutefois, cette attitude est risquée. Si Zeus avait inspecté avec précaution les deux portions il aurait alors découvert la supercherie et aurait pris la partie contenant la viande. Prométhée aurait alors récupéré les os. Par conséquent, le fait de tricher pour celui qui découpe comporte un risque. Dès que le deuxième convive peut regarder de près les deux portions alors celui qui découpe n'a aucun intérêt à tricher.
Finalement, la méthode *Un coupe, l'autre choisit* possède les avantages suivants : Elle est simple à comprendre et à mettre en œuvre, elle évite la jalousie entre les convives, le convive qui découpe prend un risque s'il triche.

De nos jours, ce protocole est utilisé pour partager les ressources minérales se trouvant dans les fonds marins des eaux internationales. En effet, ses ressources doivent pouvoir être exploitées par tous les pays (développés et en développement). Les pays en développement n'ayant pas encore les moyens pour procéder à l'extraction de minerais dans ces zones, il faut les protéger afin que les pays développés n'épuisent pas toutes ces ressources. Ainsi, afin de protéger les pays en développement, la Convention des Nations Unies sur le droit de la Mer[32], utilise le protocole suivant : Si un pays développé souhaite exploiter une partie des fonds marins alors ce pays doit proposer une division en deux de cette partie. Ensuite, une société minière internationale s'appelant l'Enterprise, financée par les pays développés et représentant les pays en développement, choisit l'une des deux moitiés afin qu'elle soit réservée pour l'exploitation future par les pays en développement.

La méthode *Un coupe, l'autre choisit* a donc traversé les âges grâce à ses qualités. Cependant, cette méthode possède un inconvénient : Elle ne fonctionne que pour deux individus !

32. voir Article 140 et Annexe III, article 8

Cela nous conduit à nous poser la question suivante :
Comment généraliser cette méthode pour effectuer un partage entre un nombre quelconque d'individus ?

Cette question simple semble naturelle. Pourtant, la première réponse à cette question ne fut apportée qu'en 1946 par Bronisław Knaster dans un article[33] des *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, intitulé « Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus ». Dans cet article l'auteur explique que cette question lui fut posée en 1944 par Hugo Steinhaus et qu'avec son collègue Stefan Banach ils ont trouvé un moyen d'y répondre. L'article, écrit en français, fait deux pages et présente une méthode très simple.
Ce résultat sera popularisé par Hugo Steinhaus lors de la conférence internationale de la société d'économétrie[34] en 1947.

Nous reviendrons plus en détails sur ce problème au chapitre 8 consacré aux partages de gâteaux et la méthode de Banach et Knaster y sera exposée.

La critique de Sénèque

Nous venons de voir que le problème du partage est présent dès l'origine des mathématiques. Ensuite, nous avons vu que ce problème a fait émerger différentes idées et notions mathématiques. Dans ce qui suit, nous verrons d'autres problèmes et d'autres notions permettant de « résoudre » le problème du partage. Toutefois, il existe aussi une autre approche et un autre point de vue concernant le partage. Ce point de vue étant peut être aussi ancien que les mathématiques et présentant une critique intéressante de l'utilisation de celles-ci il est important de le signaler.

Dans les *Lettres*[35] *à Lucilius*, Sénèque, philosophe stoïcien qui vécut au premier siècle de notre ère, écrit :

« *La géométrie m'apprend à mesurer de vastes fonds de terre, qu'elle m'apprenne plutôt la juste mesure de ce qui suffit à l'homme. L'arithmétique m'apprend l'art de compter, de prêter mes doigts aux calculs de l'avarice ; qu'elle m'apprenne plutôt le néant de pareils calculs, qu'il n'en est pas plus heureux l'homme dont l'immense fortune lasse ses teneurs de livres [...]. Que*

33. (Knaster, 1946)
34. (Steinhaus, 1948b; Steinhaus, 1949a)
35. voir la Lettre LXXXVIII, Des arts libéraux.

me sert de savoir régler le partage du plus petit champ, si je ne sais point partager avec un frère ? À quoi bon relever en expert jusqu'au dernier pied d'un arpent, et ressaisir une minime fraction échappée à la toise, si je me chagrine de ce qu'un voisin puissant écorne ma propriété ? L'arithmétique me donne le secret de ne rien perdre de mes limites ; et je voudrais, moi, qu'on me donnât celui de tout perdre avec sérénité.[...] Que ton art est sublime ! Tu sais mesurer les corps ronds ; tu réduis au carré toutes les figures qu'on te présente, tu nous dis les distances des astres, il n'est rien qui ne soit soumis à ton compas. Homme si habile, mesure donc l'âme humaine, montre toute sa grandeur, montre toute sa petitesse. Tu sais ce que c'est qu'une ligne droite ; que t'en revient-il, si ce qui est droit en morale tu ne le sais pas ? »

Chapitre 2

Partager des biens, des dettes

Questions de proportion

Nous avons vu qu'en Mésopotamie et en Égypte étaient apparus des problèmes de partage de champs. Ces problèmes provenaient de problèmes pratiques comme la distribution d'un héritage ou la levée d'un impôt mais d'autres problèmes pratiques liés au partage ont aussi dû être résolus dans l'antiquité.

Le prisme AO 8862 remonte à la première dynastie babylonienne et est conservé au musée du Louvre[1]. Ce document se présente sous la forme d'un pavé sur lequel des problèmes sont gravés sur les quatre faces latérales. Ce document n'a donc pas la forme d'une tablette. Voila pourquoi ce document s'appelle prisme et non pas tablette.
Sur ce prisme, deux problèmes portent sur la distribution de la quantité de grains à distribuer aux hommes en fonction du travail effectué. Ici, le travail correspond à la livraison d'une certaine quantité de briques. Dans l'un des problèmes, le premier homme amène 7 unités, le second en amène 11, le troisième 13 et le quatrième 14. L'étude de ce texte révèle alors que la quantité de grains distribués est proportionnelle au nombre de briques livrées[2].

1. La désignation AO 8862 correspond au numéro d'inventaire qui permet d'identifier cet objet, AO signifiant Antiquités Orientales.
2. (Thureau-Dangin, 1932), (Caveing, 1994)

En Égypte des problèmes similaires ont dû être résolus. Le papyrus Rhind a été écrit au XVI^e siècle avant J.-C. par le scribe Ahmès[3] et présente là encore plusieurs problèmes de partage. Par exemple, le soixante-troisième problème demande comment partager 700 miches de pain entre 4 hommes tout en ayant des parts respectant les proportions 2/3, 1/2, 1/3 et 1/4. La réponse est : $266 + 2/3$ pour le premier, 200 pour le second, $133 + 1/3$ pour le troisième et 100 pour le quatrième.

Sur cet exemple, nous constatons que les égyptiens savaient calculer avec des fractions. Cependant, ils utilisaient essentiellement des fractions du type 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,..., donc des fractions pouvant s'écrire sous la forme $1/n$, où n est un entier. De nos jours, nous appelons fraction égyptienne une fraction de ce type.

Évidemment, ici nous utilisons nos notations modernes pour représenter les nombres et les fractions. Les égyptiens utilisaient d'autres symboles[4]. Pour représenter les nombres nous utilisons la notation indo-arabe avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et non pas des hiéroglyphes ou les chiffres romains. Le système de numération que nous utilisons aujourd'hui a été introduit en Europe par le mathématicien Leonardo Fibonacci (1170-1250). En 1202, il publie le *Liber Abaci* que l'on peut traduire par « Livre du calcul ». Leonardo Fibonacci était un mathématicien italien et avec son livre à destination des savants et des marchands de son époque il essaie de vulgariser l'usage des chiffres arabes et leur utilisation. Dans le chapitre douze du Liber Abaci on trouve différents problèmes avec leurs solutions. Voici un de ces problèmes :

Deux hommes se promenaient. Ils avaient des pains : l'un trois et l'autre deux. Au moment de manger, un soldat arriva et ils l'invitèrent. Les pains furent partagés et chaque convive reçut la même part. À la fin du repas, tous les pains étaient mangés et le soldat laissa aux deux hommes cinq pièces. Le premier prit trois pièces et le second en pris deux. La question est de savoir si ce partage est juste ou non.

Cet exemple sert à illustrer comment utiliser des proportions et calculer avec des fractions. Fibonacci montre alors pourquoi ce partage n'est pas juste. En voici la raison :

3. Le nom Papyrus Rhind vient d'Alexander Henry Rhind qui l'acheta à Louxor en 1858. Ce document se trouve depuis 1865 au British Museum.

4. Pour plus de précisions sur l'arithmétique égyptienne, le lecteur peut consulter (Caveing, 1994), (Boyer et Merzbach, 2011).

Si les trois convives mangent 5 pains alors cela signifie que chaque convive en mange 5/3. La figure suivante montre comment cela est possible. Une portion de pain notée 1 (respectivement 2 ou S) est attribuée au premier convive (respectivement au deuxième ou au soldat).

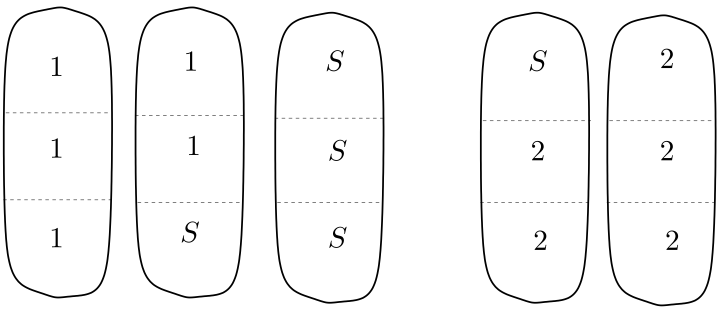

FIGURE 2.1 – Partage de 5 pains entre 3 personnes

Ce partage a donc couté au premier $3 - 5/3$ (ses trois pains moins ce qu'il a mangé), soit $3 - 5/3 = 4/3 = 1 + 1/3$, c'est-à-dire un pain plus le tiers d'un autre pain. Cela correspond bien aux portions des trois pains offertes au soldat et notées S sur la figure. Pour le second convive, le partage a couté $2 - 5/3 = 1/3$ (ses deux pains moins ce qu'il a mangé). Ainsi pour le second convive, le partage n'a couté que le tiers d'un pain.
Finalement, le premier a donc donné 4/3 de pain au soldat alors que le second n'en a donné que 1/3. Le premier convive doit donc recevoir quatre pièces et le second une seule.

Dans un autre chapitre du Liber Abaci, Fibonacci présente une méthode pour représenter une fraction quelconque sous la forme d'une somme de fractions égyptiennes. Par exemple, il montre comment obtenir l'égalité $7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8$, ou encore l'égalité $10/11 = 1/2 + 1/3 + 1/22 + 1/33$.
Sur les exemples précédents nous remarquons que la longueur de la décomposition d'une fraction sous la forme d'une somme de fractions égyptiennes est plus ou moins longue. La première égalité utilise 3 fractions, tandis que la seconde en utilise 4. En réalité, il est possible de rendre la décomposition aussi longue que nous le souhaitons. Par exemple, en utilisant l'égalité $1/8 = 1/9 + 1/72$, nous pouvons rallonger l'écriture de 7/8 sous la forme $7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/9 + 1/72$. Ensuite, en utilisant l'égalité $1/72 = 1/73 + 1/5256$, nous obtenons $7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/9 + 1/73 + 1/5256$.

Bref, il est possible d'obtenir une décomposition aussi longue que nous le voulons. Cependant, en général nous préférons les formules courtes aux formules longues. Donc il est naturel de se demander si nous pouvons obtenir une décomposition avec peu de termes. Par exemple, *pouvons nous toujours écrire une fraction du type* $4/n$ *comme une somme de seulement 3 fractions égyptiennes ?*

En 1948, les mathématiciens Paul Erdős et Ernst Gabor Straus ont réfléchi à ce problème et pensaient qu'une telle décomposition était possible. Cependant, ils n'ont pas réussi à en trouver une démonstration. Depuis, ce problème s'appelle la *conjecture d'Erdős-Straus*. Dans certains cas, par exemple si n est plus petit que 1003162753 nous savons que ce résultat est correct, mais dans le cas général aucune preuve n'a encore été donnée.

Il existe de nombreux autres problèmes mathématiques mettant en jeu des fractions égyptiennes[5]. Par exemple, si vous arrivez à résoudre la conjecture d'Erdős-Straus, vous pourrez ensuite passer à celle de Sierpinski. Celle-ci demande s'il est toujours possible d'écrire $5/n$ comme une somme de seulement 3 fractions égyptiennes...

Finalement, les problèmes de partage ont été l'occasion d'étudier les fractions aussi bien dans l'Antiquité qu'au Moyen-Âge. Les fractions permettent de représenter une proportion. La notion de proportion est liée à celle d'un partage juste. Aristote définit d'ailleurs la *justice distributive* à l'aide de la proportion : « *Le juste en question est ainsi la proportion, et l'injuste ce qui est en dehors de la proportion*[6] ».
De nos jours encore les proportions et les fractions sont introduites à l'école élémentaire à la suite de problèmes de partage (souvent des partages d'une tarte afin de pouvoir visualiser les portions de la tarte). Toutefois, nous venons de voir que tous les problèmes sur les fractions ne sont pas élémentaires. Certains sont encore sans réponse.

Partager quand il n'y en a pas assez

Parfois, la chose ou les choses à partager ne sont pas en nombre suffisant. Nous pouvons penser aux canots de sauvetage du Titanic, aux masques chirurgicaux lors de la pandémie du Covid-19, ou encore aux dettes laissées

5. Voir la section D11 dans (Guy, 2004)
6. voir Livre V dans (Aristote, 2014)

par une entreprise à la suite d'une banqueroute. Dans ce qui suit nous n'allons pas étudier comment justifier certains choix du point de vue du droit ou de l'éthique. Nous allons simplement montrer que différentes règles sont envisageables et que certaines ont mis beaucoup de temps avant d'être comprises.

Différents points de vue

Pour illustrer les différentes possibilités de partage, nous allons imaginer qu'un groupe de trois musiciens se constitue pour un concert. Ces trois musiciens n'ont pas habituellement le même cachet. Par exemple, nous pouvons supposer que l'un d'eux est une star internationale et que ce n'est pas le cas des deux autres.
Nous allons noter c_1 le cachet reçu habituellement par le premier musicien, c_2 le cachet du second et c_3 le cachet du troisième.
Malheureusement, le concert n'a pas attiré autant de monde que prévu. La recette est inférieure à la somme des cachets souhaités. Donc, en notant R la recette, nous avons $R < c_1 + c_2 + c_3$.
Comment ces trois musiciens doivent-ils se partager la recette ?
Plusieurs solutions s'offrent à eux :

Le partage égalitaire : Dans ce cas, la recette est partagée en trois parts égales. Nous ne prenons donc pas en compte le fait que la présence de la star internationale a permis de faire de la publicité pour ce concert.

Le partage proportionnel : La recette est partagée proportionnellement entre les musiciens. Donc si la star reçoit habituellement un cachet deux fois plus important que les autres musiciens alors pour ce concert elle reçoit aussi un cachet deux fois plus important.

Le partage contrôlé des gains : La recette est distribuée au fur et à mesure, euro par euro, à chaque musicien. Lorsque l'un d'eux obtient son cachet habituel alors il se retire du partage et les autres continuent sur le même principe.
L'idée ici est de partager les gains de manière égalitaire sans pour autant qu'un des musiciens reçoivent plus que son cachet attendu. Si les cachets attendus par les musiciens sont $c_1 = 1000$ €, $c_2 = 2000$ € et $c_3 = 3000$ € mais que la recette n'est que de 4000 € alors avec ce partage le premier reçoit 1000 €, le second 1500 € et le troisième 1500 €.