# PRÉPA PASS & LAS

MÉTHODE
COURS
EXERCICES

SE PRÉPARER À RÉUSSIR DÈS LE LYCÉE

# BIOPHYSIQUE
# CHIMIE - BIOCHIMIE
# CHIMIE ORGANIQUE

Théo Cossart (coord.)
Dorian Bochaton, Virgyl Camberlein,
Anthony Delpech, Edouard Lansiaux

ellipses

1

# CONCEPTS ET OUTILS FONDAMENTAUX EN BIOPHYSIQUE

## I OUTILS MATHÉMATIQUES

### 1 FONCTIONS

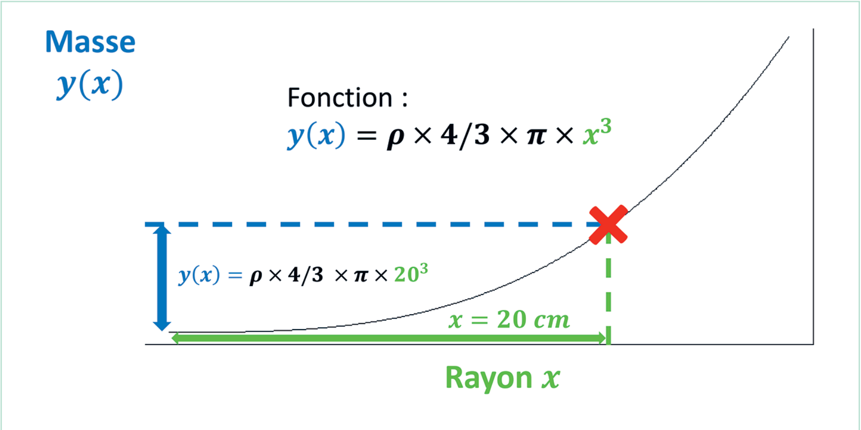
#### A. FONCTIONS

Une fonction donne une valeur en **fonction** d'une autre. On peut chercher la masse d'une pomme en fonction de son diamètre, ou encore comment varie le taux de sucre dans le sang en fonction du temps après avoir mangé une sucrerie.

– Mise sous forme **mathématique**, une fonction est sous la forme d'une équation, avec d'un côté de l'égalité la valeur que l'on cherche (souvent notée « $y(x)$ » qui signifie y en fonction de x), et de l'autre côté de l'égalité la formule qui permet de transformer x en la valeur recherchée $y(x)$. Voici pour illustrer la fonction qui donne la masse d'une boule de bowling en fonction de son rayon noté x, en fonction d'une constante notée ρ qui dépend du matériau utilisé :

$$y(x) = \rho \times \frac{4}{3} \times \pi \times x^3$$

– Mise sous forme **graphique**, on place la valeur recherchée $y(x)$ en ordonnée (axe vertical, « Ordonnée » commence par un « O », c'est donc l'axe qui va vers le « haut »), et la valeur de x en abscisse (axe horizontal, « Abscisse » commence par un « A », c'est donc l'axe qui est en « bas »). Pour chaque valeur de x, on fait correspondre une valeur de y, et on trace le point d'intersection. Tous les points d'intersection donnent la courbe représentative de la fonction. Voici la représentation graphique de la fonction qui donne la masse d'une boule de bowling en fonction de son rayon.




La courbe est la représentation graphique de la fonction, c'est-à-dire que chaque point de la courbe donne **en hauteur la valeur de y(x)** en fonction **en largeur de la valeur de x**.

Voyons maintenant comment décrire plus profondément une fonction.

## B. DÉRIVÉES ET DÉRIVÉES SECONDES

Une **dérivée** exprime graphiquement la **pente** de la courbe qui décrit une fonction. Cette dernière peut être tracée en dessinant sa **tangente,** c'est-à-dire une droite qui touche une courbe en un seul point sans la traverser.

Visuellement, elle semble « **posée** » sur la courbe, ou « **accrochée** » en dessous. Ainsi, si la dérivée d'une fonction en un point est positive, sa courbe « va vers le haut », et si elle est négative, la courbe « va vers le bas ».

Définissons une fonction $y = f(t)$, qui donne une valeur y en fonction de celle de t. Ainsi, pour décrire la pente de sa courbe, il faut « zoomer » de manière très intense, et mesurer de combien varie y pour une infime variation de t. Ces infimes variations sont notées dy et dt, et la pente d'une fonction $y = f(t)$ est donc notée dy / dt, comme illustré ci-dessous.

EXEMPLE

Imaginons que y représente la **position** d'une voiture en fonction du **temps** t. Cette voiture se déplace le long d'une route. La variation de position en fonction du temps à un instant donné peut alors être écrite $\frac{dy}{dt}$.

Or, la variation de position en fonction du temps représente une **vitesse** !

La vitesse v de la voiture à un instant donné est donc la dérivée de sa position par rapport au temps : $v = \frac{dy}{dt}$.

Lorsque la dérivée de la position par rapport au temps est positive, la voiture a une vitesse positive et avance, et lorsqu'elle est négative, la voiture recule.

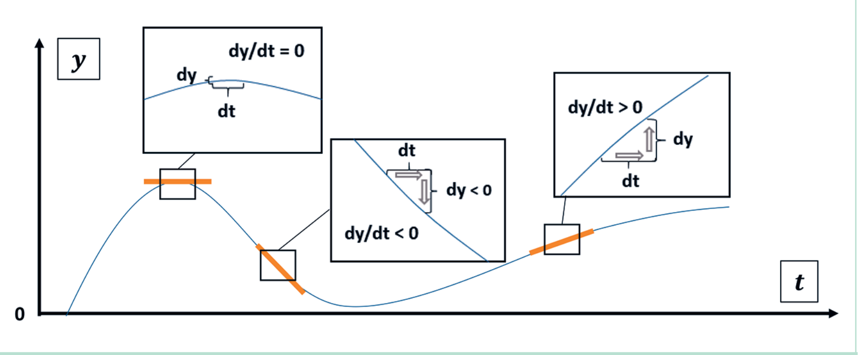
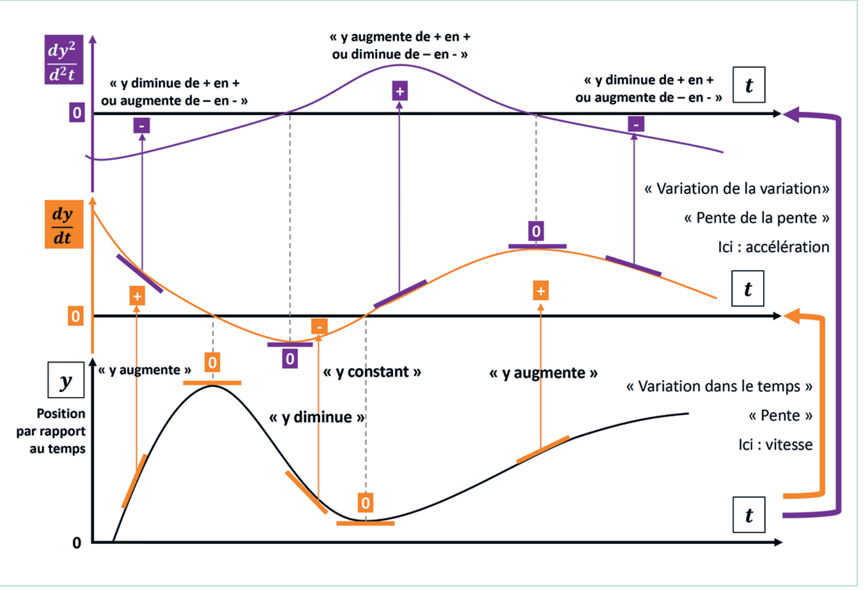



**Illustration des notions de variations infinitésimales dy et dt, de pentes, et de dérivées, pour une fonction y = f(t)**

Une **dérivée seconde** se comprend comme « la pente de la pente ». Ainsi, si la pente d'une fonction devient « **de plus en plus positive** », décrivant une forme de « U », la dérivée seconde de cette fonction sera positive. À l'inverse, si la pente de la fonction devient « **de plus en plus négative** », décrivant une forme de « ∩ », la dérivée seconde est négative.

En reprenant le même exemple, on peut décrire la variation de la variation de la position en fonction du temps. C'est-à-dire la variation de la vitesse, que l'on appelle **l'accélération**.

Ainsi, l'accélération d'un objet est la dérivée seconde de sa position par rapport au temps : $a = \frac{d^2x}{dt^2}$.




Graphiques récapitulatifs, à lire de bas en haut : **en bas, la position** d'un objet sur un axe en fonction du temps, **au milieu**, on fait correspondre sa dérivée en fonction du temps (soit sa **vitesse**), et **en haut**, on fait correspondre la variation de sa vitesse en fonction du temps (soit son **accélération**).

## C. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans notre exemple, nous avons décrit les variations d'une fonction **pour une seule valeur de t**, mais il est aussi possible de décrire ces variations comme une fonction, qui permet de l'exprimer **pour toutes les valeurs de t**.

C'est le rôle des **équations différentielles**, dont l'écriture mathématique met en relation dans une seule formule la fonction non dérivée, et un ou plusieurs niveaux de dérivation de cette formule.

Par exemple, voici une **équation différentielle du premier ordre**, c'est-à-dire qui contient une fonction et sa première dérivée :

$$y' + b \times y = c$$

Avec b et c des constantes, et y' la dérivée de y.

Cela peut aussi s'écrire :

$dy / dt + b \times y = c$ avec la notation que nous avons évoquée.

Il paraît difficile avec ces éléments de savoir comment y varie en fonction de t…

En effet, pour ce faire, il faut **résoudre** l'équation différentielle : c'est-à-dire trouver la ou les fonctions $y(t)$ qui remplissent ces caractéristiques.

On peut démontrer que la **solution** de ce type de dérivées est de la forme :

$$y(t) = ke^{-b\times t} + c / b$$

Pour illustrer ceci, reprenons notre voiture, dont le mouvement est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{dy}{dt} + 0,5 \times y = 40$$

Et qui commence sa course à $t_0 = 0s$ avec une vitesse de 40 m/s, à une position $y = 0m$

Nous avons donc, en numérotant les éléments dont nous disposons :

1. $\frac{dy}{dt} + 0,5 \times y = 40$ à tout moment
2. $y_0 = 0m$ à $t_0 = 0s$
3. $\frac{dy}{dt} = 40 m / s$ à $t_0 = 0s$

Il s'agit donc bien d'une équation de la forme :
$dy / dt + b \times y = c$
Avec $b = 0,5$ et $c = 40$ identifiés dans l'équation (1)

Une solution de cette équation est donc :

$$y(t) = ke^{-b\times t} + \frac{c}{b}$$

En remplaçant b et c par leurs valeurs identifiées dans (1) :

$$y(t) = ke^{-0,5\times t} + 40 / 0,5$$

En remplaçant $40 / 0,5$ par 80 :

$$y(t) = ke^{-0,5\times t} + 80$$

Nous avons presque tous les éléments de cette solution, pour connaître la position de la voiture y en fonction du temps t, mais il nous manque la valeur de k.

Pour la déterminer, on peut alors utiliser le cas particulier que nous connaissons, à savoir les **conditions initiales** à $t = 0$, que sont les valeurs (2) $y_0 = 0$ et (3) $\frac{dy}{dt} = 40$ :

$$y(0) = ke^{-0,5\times 0} + 80 = 0$$

Or $e^{-0,5\times 0} = e^0 = 1$, donc :

$y(0) = k \times 1 + 80 = 0$

$k = -80$

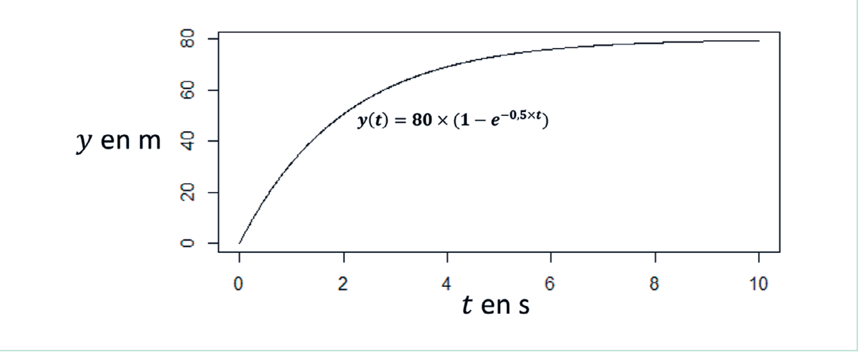
En remplaçant k par cette valeur, nous avons identifié tous les éléments de la **solution** de cette équation différentielle, qui nous donne la position de la voiture en fonction du temps :

$$y(t) = -80 \times e^{-0,5\times t} + 80$$

En factorisant par 80 pour simplifier :

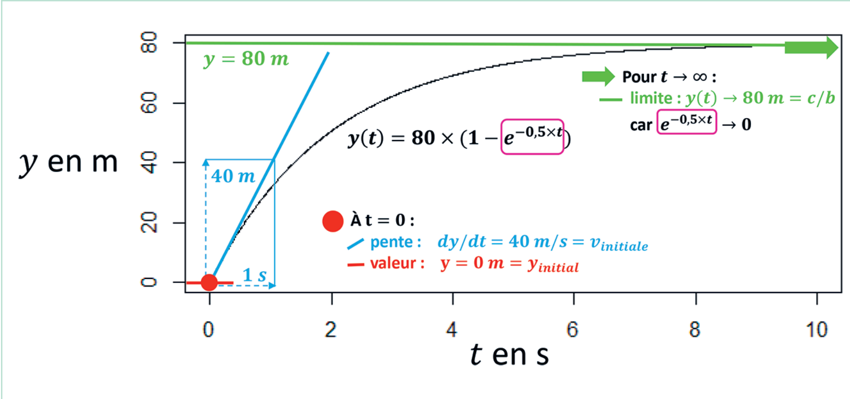
$$y(t) = 80 \times \left(1 - e^{-0,5\times t}\right)$$

On peut alors tracer la courbe qui représente cette position y de la voiture en fonction du temps t :




La voiture commence donc avec une certaine vitesse (fixée à 40 m/s dans les conditions initiales), puis elle ralentit jusqu'à atteindre une vitesse nulle, car la position y(t) finit par devenir constante autour de 80 m.

Remarquons que l'on retrouve différentes valeurs remarquables présentes dans l'équation différentielle que nous avons résolue, et dont cette fonction représente la solution :




**Le point rouge à t = 0** montre que la position au début et à 0 m. La pente en ce point (la dérivée de la fonction) est de 40, or on sait que la dérivée de la position en fonction du temps est la vitesse : la voiture commence donc à une vitesse de 40 m/s.

**La flèche verte** montre qu'après une longue période, la position reste à 80 m (ce qui correspond au rapport c/b dans l'équation), et la pente de la courbe (la vitesse) devient nulle. À la fin de la période de freinage, la voiture est donc à l'arrêt, à 80 m du point de départ.

# 2 MÉTHODE DE TRAVAIL

## A. COMPRENDRE UNE FORMULE

Une méthode indispensable pour comprendre le sens des nombreuses formules présentées en biophysique (et dans d'autres domaines) est d'**explorer leur comportement quand leurs variables changent**. Il s'agira d'un fil directeur de cet ouvrage, afin que vous puissiez prendre de l'avance non pas en mémorisant des formules que vous oublierez rapidement, mais en **comprenant** les phénomènes qu'elles décrivent.

Par exemple, nous verrons plus loin que la Pression, le Volume, et la Température d'un nombre « n » de moles de gaz sont reliés par la relation PV = nRT, avec R une constante. Il n'est pas utile de la mémoriser, il suffit de **comprendre** ce qu'il se produit si on augmente la Température du gaz dans un contenant qui maintient le Volume constant :

$$P_{?} = n_{constant} \times R_{constant} \times T_{\nearrow} / V_{constant}$$

On remarque alors que la Pression ne peut qu'augmenter ! C'est en effet ce que l'on observe lorsqu'on chauffe une cocotte-minute hermétique remplie d'air : la pression augmente quand elle chauffe. Prendre cette approche pour saisir l'essence des formules croisées en biophysique est souvent utile.

### B. IMPORTANCE DES SIMPLIFICATIONS

De nombreux exercices sont basés sur le calcul de **rapports**, qui permettent de **simplifier** les équations en une expression facile à calculer, en éliminant au numérateur et au dénominateur ce qui est constant.

Par exemple, en reprenant l'application du paragraphe précédent, où on avait :

$$P_1 = n_1 \times R \times T_1 \;/\; V_1$$

Si l'on triple la température, on aura une pression :

$$P_2 = n_1 \times R \times 3T_1 \;/\; V_1$$

Dans un autre cas, on laisse s'échapper la moitié du gaz.

On aura alors une pression :

$P_3 = 0,5n_1 \times R \times T_1 \;/\; V_1$

Si l'on demande de calculer le **rapport** $P_2 / P_3$ :

$$P_2 / P_3 = \frac{n_1 \times R \times 3T_1 / V_1}{0,5n_1 \times R \times T_1 \;/\; V_1}$$

**Simplification** de $n_1$, R, $T_1$, $V_1$ au numérateur et au dénominateur :

$P_2 / P_3 = 3 / 0,5 = 6$

La pression est donc 6 fois supérieure dans le cas 2 que dans le cas 3. Remarquez que pour calculer ce résultat, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser la valeur numérique de tout ce que nous avons simplifié : la constante R, le nombre de moles n, la température initiale $T_1$, et le volume $V_1$.

Cela permet aux enseignants de vous évaluer sur votre capacité à manipuler les formules, sans perdre de temps à faire à la calculatrice ou à la main de gros calculs numériques de niveau collège.

# II DÉFINITIONS IMPORTANTES EN PHYSIQUE

## 1 QU'EST-CE QUE LA PHYSIQUE ?

### A. DÉFINITION

La physique est l'étude du fonctionnement du monde « **physique** » qui nous entoure. Elle s'attache à décrire les éléments qui le composent et les phénomènes qui régissent leur comportement et leurs interactions.